И. В. Ященко
С. А. Шестаков
А. С. Трепалин

Подготовка к ЕГЭ по математике

19 задач

2016

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ФГОС

Методические указания

УДК 373.167.1
ББК 22.141я721
Я97

Ященко И. В. и др.

Я97 Подготовка к ЕГЭ по математике в 2016 году. Профильный уровень. Методические указания / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, А. С. Трепалин. — М.: МЦНМО, 2016. — 204 с.

ISBN 978-5-4439-0898-4

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике на профильном уровне, для организации и проведения итогового повторения, диагностики проблемных зон в знаниях старшеклассников и их последующей коррекции.

Пособие написано в соответствии с утвержденной демоверсией и спецификацией ЕГЭ по математике 2016 года. Оно содержит подробный разбор структуры экзамена, а также позадачные комментарии, тренинги и диагностические работы в формате ЕГЭ. Материалы пособия апробированы в сотнях школ различных регионов России при организации подготовки к Единому государственному экзамену. Пособие позволяет проверить навыки решения задач, качество усвоения материала, выстроить индивидуальные траектории повторения и эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Пособие адресовано учащимся старших классов и их родителям, учителям математики и методистам.

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.141я721

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-0898-4

© Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., 2016
© МЦНМО, 2016

ЕГЭ-2016 по математике и как к нему готовиться (методические рекомендации с разбором задач)

Начиная с 2015 года выпускник может выбрать один из двух вариантов Единого государственного экзамена по математике: экзамен базового уровня (для тех, кто не собирается получать высшее образование и тех, кто собирается делать это в университетах гуманитарного направления) или экзамен профильного уровня (для тех, кто собирается продолжать образование в университетах на факультетах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов — естественнонаучных, технических, финансовых и др.).

Структура экзамена профильного уровня претерпит некоторое — достаточно существенное для выпускников — изменение: число заданий с кратким ответом станет на 2 меньше. В демоверсии 2016 года отсутствуют арифметическая текстовая задача на оптимальный выбор по табличным данным (задание 3 прошлого года) и одна из стереометрических задач (задание 12 прошлого года); эти задания, видимо, будут перенесены в другие разделы открытого банка ЕГЭ по математике. Соответственно поменяется (со сдвигом вверх) и нумерация заданий: так, задание 4 прошлого года станет заданием 3, а задание 14 — соответственно заданием 12. Продолжительность экзамена останется прежней — 3 часа 55 минут.

Таким образом, вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень) 2016 года состоит из двух частей и содержит 19 заданий. Часть 1 состоит из 8 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Правильное решение каждого из заданий 1–12 (задания с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби) оценивается 1 баллом. Задания 13–19 — это задачи, требующие развернутого решения. Правильное решение каждого из заданий 13, 14 и 15 оценивается 2 баллами; заданий 16 и 17 — 3 баллами; 18 и 19 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 32 балла.

Форма и содержание экзамена требуют более полного описания типов и особенностей заданий каждой из двух новых

демоверсий и открытого банка задач (именно на его основе формируются задания с кратким ответом). Такому описанию, снабженному примерами решения задач, аналогичных задачам демоверсий, и посвящена эта часть пособия. Надеемся, что она окажется полезной как выпускникам, так и учителям старшей школы, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Настоящее пособие предназначено для организации итогового повторения (в том числе, с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену и включает как задания, которые несколько проще возможных задач ЕГЭ, так и задания, которые несколько сложнее этих задач. Все задания сгруппированы в 30 диагностических работ и 19 тематических тренингов (по одному тренингу на каждую задачу профильного варианта экзамена).

Тренинги состоят из 20 заданий каждый: 10 подготовительных и 10 зачетных заданий. Уровень сложности подготовительных задач увеличивается от задачи к задаче, пока в последних заданиях не достигает уровня сложности реальных заданий экзамена; уровень сложности зачетных заданий, в целом, соответствует уровню сложности реальных заданий ЕГЭ.

Первые две диагностические работы предназначены для завершающего этапа традиционного осеннего повторения материала 10-го класса. Они составлены по образцу демоверсии и состоят из 19 задач каждая. При этом одна из работ не содержит задач с логарифмами, другая — задач с производной, что позволяет выбрать работу в соответствии с используемым учебником.

Следующие 4 диагностические работы содержат по 8 задач, аналогичных заданиям части 1 ЕГЭ (т. е. заданиям 1—8); за ними следуют 4 диагностические работы, содержащие по 4 задачи, аналогичные заданиям 9—12 второй части ЕГЭ и 6 диагностических работ, содержащих весь спектр заданий с кратким ответом (задания 1—12). Далее идут 4 диагностические работы, содержащие по 7 заданий части 2 ЕГЭ; завершают пособие 10 диагностических работ, составленные в соответствии со спецификацией и демоверсией профильного ЕГЭ по математике 2016 года (тренировочные варианты). При подготовке

к решению заданий с кратким ответом следует вначале решить первые диагностические работы соответствующего раздела для выявления проблемных зон в знаниях и навыках решения задач, затем повторить вызвавший затруднения материал по учебнику, решить последовательно соответствующие тренинги (подготовительные и зачетные) и перейти к следующим диагностическим работам для оценки успешности повторения и закрепления навыков решения задач части с кратким ответом. Аналогичный алгоритм можно рекомендовать и для подготовки к решению задач с развернутым решением, но при этом необходимо наряду с данным пособием использовать учебники для специализированных классов, учебники профильного уровня и проверенные временем пособия для поступающих в вузы.

Задания с кратким ответом

Общие рекомендации

Ответом к заданиям 1—12 является число или конечная десятичная дробь. При решении этих задач и проверке решений важно помнить следующее.

- Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7, или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому, если выпускник уверен в задаче, за которую получил минус, ему нужно идти на апелляцию.
- Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан, как неправильный. Поэтому, если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь, например $\frac{1}{8}$, перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,125.

- Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер, вероятно, распознает ответ как неправильный.

Часть 1

Задание 1

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.

Характеристика задания Несложная арифметическая текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями, делать прикидку и оценку.

Пример задания Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9 % активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте четырех месяцев и весом 8 кг в течение суток?

РЕШЕНИЕ. Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится

$$20 \cdot 0{,}09 = 1{,}8 \text{ мг}.$$

Ребенку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1{,}35 = 10{,}8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно

$$10{,}8 : 1{,}8 = 6.$$

ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Статистика выполнения задания показывает, что арифметические текстовые задачи вызывают трудности даже в простейших вариантах. Поэтому особое внимание следует уделить арифметическим вычислениям, в том числе устному счету, навыки которого у части выпускников либо частично утрачены, либо недостаточно сформированы. Часть ошибочных ответов обусловлена невнимательностью и неумением выполнять арифметические действия без калькулятора.

Задание 2

Тип задания по кодификатору требований

Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описание поведения и свойств функции по ее графику, нахождение по графику функции наибольшего и наименьшего значений; построение графиков изученных функций.

Характеристика задания

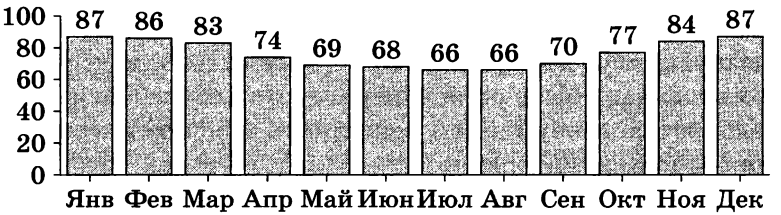
Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т. д.) Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значением (возможно, за определенный период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий

Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например, нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример задания

На диаграмме показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе Ейске по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха в Ейске осенью.



РЕШЕНИЕ. Средняя относительная влажность воздуха в Ейске осенью равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в сентябре, октябре и ноябре, т. е. $\dfrac{70+77+84}{3}=77$.

ОТВЕТ. 77.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Примерно двенадцатая часть выпускников не смогла правильно ответить на этот вопрос.

Задание 3

Тип задания по кодификатору требований

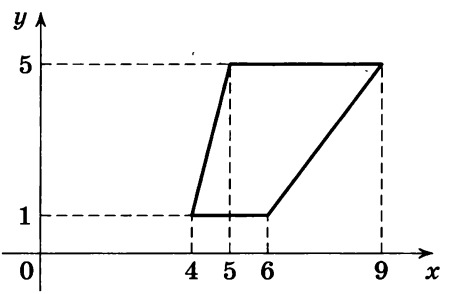
Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), связанное с проверкой умений вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования, проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих тригонометрические функции.

Характеристика задания

Задание на вычисление площади треугольника, четырехугольника, круга и его частей, в том числе по данным рисунка, представляющего собой изображение фигуры, площадь которой требуется найти, на координатной плоскости или клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1×1.

Комментарий Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, для треугольника или параллелограмма во многих случаях достаточно провести мысленно высоту к одной из сторон. Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те, длины которых выражаются целым числом делений сетки, либо те, которые параллельны осям координат. В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов можно использовать теорему Пифагора. Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Пример задания Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



РЕШЕНИЕ. Основания трапеции равны 2 и 4, а высота равна 4. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(2+4)\cdot 4=12$.

ОТВЕТ. 12.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года Больше трети выпускников не помнит простейшие факты и теоремы планиметрии. Часть неправильных ответов связана с недостаточным знанием формул площадей плоских фигур (в ответах приведены удвоенные значения площадей), часть — с неверной прикидкой. Если площадь выражается дробным числом, результаты хуже по сравнению с задачами, ответы в которых являются целыми числами.

Задание 4

Тип задания по кодификатору требований Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций на языке теории вероятностей и статистики; вычисление в простейших случаях вероятности событий.

Характеристика задания Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Пример задания Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

РЕШЕНИЕ. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 6$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 25$ всех равновозможных исходов, находим $P = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$.

ОТВЕТ. 0,24.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года Решивших задачу — менее 60%. Высокий процент тех, кто не приступал к решению, т. е. не может найти вероятность элементарного события даже в простейшем случае.

Задание 5

Тип задания по кодификатору требований Задание на решение уравнения или системы уравнений, проверяющее умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Характеристика задания Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае в зависимости от условия в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример задания Найдите корень уравнения $4^{-5+x}=64$.

РЕШЕНИЕ. Для решения уравнения достаточно знать, что $64=4^3$. Тогда $-5+x=3$, откуда $x=8$.

ОТВЕТ. 8.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года С задачей справились примерно три четверти выпускников. Наибольшие трудности — в уравнениях, правая часть которых является относительно высокой степенью двойки (пятой или шестой), тройки (третьей или четвертой), четверки (третьей) и пятерки (третьей). Часть ошибочных ответов обусловлена неумением выполнять действия с дробями и степенями, в частности, переходить к степеням с отрицательным показателем, а также ошибками решения линейных уравнений. Для того чтобы исключить возможность арифметической ошибки, в этой задаче следует делать обязательную проверку полученного ответа путем его подстановки в данное уравнение.

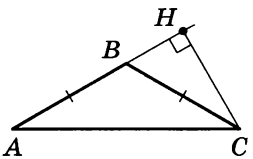
Задание 6

Тип задания по кодификатору требований Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, либо практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания Несложная планиметрическая задача, в том числе, по готовому чертежу.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример задания В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB.



РЕШЕНИЕ. Поскольку $\angle ACB = \angle CAB$, то и синусы этих углов равны: $\sin \angle ACB = \sin \angle CAB = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{7}{14} = 0{,}5$.

ОТВЕТ. 0,5.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года Правильных ответов — чуть больше половины. Результаты предсказуемы на фоне статистики по заданию 3. Ошибки связаны с плохим знанием простейших геометрических фактов и определений.

Задание 7

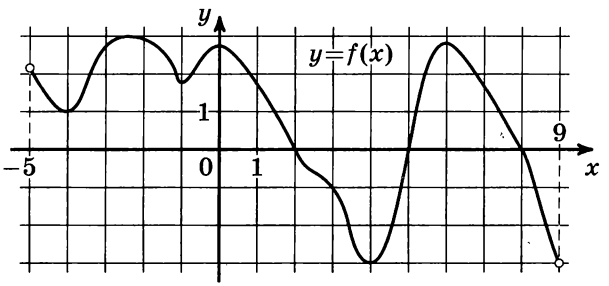
Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции, либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная положительна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная отрицательна; в каждой точке экстремума производная либо

равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает; общие точки графика производной и оси абсцисс (т. е. точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (т. е. производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу ввверх» (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее: в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример задания На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(-5; 9)$. Найдите число точек, в которых производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ равна 0.



РЕШЕНИЕ. Условие задачи предполагает подсчет точек экстремума, т. е. общего числа точек максимума и точек минимума данной непрерывной функции. Таких точек в данном случае ровно 6.

ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Правильных ответов — меньше половины. Ошибки связаны с плохим или формальным усвоением темы, не позволяющим делать правильные выводы и использовать графические интерпретации, считывать свойства функции по графику ее производной или свойства производной функции по графику этой функции.

Задание 8

Тип задания по кодификатору требований

Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания

Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий

Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания

В цилиндрический стакан налили 2,4 литра воды. После того как в стакан положили камень, уровень воды повысился на $\frac{1}{6}$ по сравнению с тем, который был до этого. Найдите объем камня, если известно, что он погрузился в воду полностью. Ответ дайте в кубических сантиметрах (1 литр равен 1000 см^3).

РЕШЕНИЕ. Объем камня равен объему вытесненной воды, т. е. объему цилиндра, высота которого в шесть раз меньше высоты данного цилиндра (объем которого, как следует из условия, равен 2400 см^3), а радиус основания — тот же. Поэтому искомый объем равен $\frac{1}{6} \cdot 2400$, т. е. 400 см^3.

ОТВЕТ. 400.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Ошибки (правильных ответов — меньше половины) связаны с недостаточным знанием основных фактов и формул стереометрии, неумением сделать правильный вывод при отсутствии конкретных числовых данных.

Часть 2

Задание 9

Тип задания по кодификатору требований

Задание на выполнение вычислений и преобразований.

Характеристика задания

Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения.

Комментарий

Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример задания

Найдите значение выражения

$$\log_6 135 - \log_6 3{,}75.$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку основания логарифмов одинаковы, данное выражение приводится к логарифму частного:

$$\log_6 135 - \log_6 3{,}75 = \log_6 \frac{135}{3{,}75} = \log_6 36 = 2.$$

ОТВЕТ. 2.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Задачу решила примерно четверть выпускников. Наибольшие проблемы — в незнании или недостаточном знании свойств логарифмов (в других вариантах — основных формул тригонометрии и табличных значений тригонометрических функций). Еще раз отметим плохие навыки арифметических вычислений без применения калькулятора.

Задание 10

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания Текстовое задание на анализ практической ситуации, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию (например, экономические, физические, химические и др. процессы).

Комментарий По условию задачи требуется составить уравнение или неравенство, сводимое к линейному или квадратному, решением которого (для неравенств — наибольшим или наименьшим решением, либо их разностью) и является искомая величина.

Пример задания Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 558 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

РЕШЕНИЕ. Из условия задачи следует, что

$$1500 \cdot \frac{f - 558}{f + 558} \leqslant 12,$$

откуда $125(f-558) \leqslant f+558$, и, далее,

$$f \leqslant \frac{126 \cdot 558}{124},$$

т. е. $f \leqslant 567$.

ОТВЕТ. 567.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года Наибольшие трудности (меньше половины правильных ответов) связаны с неумением оптимизировать вычисления. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание 11

Тип задания по кодификатору требований Построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальной ситуации на языке алгебры, составление уравнения или неравенства по условию задачи; исследование построенной модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания Традиционная текстовая задача (на движение, работу и т. п.), сводящаяся к составлению и решению уравнения.

Комментарий В качестве неизвестной, как правило, лучше выбирать искомую величину. Составленное уравнение является рациональным и сводится в большинстве случаев к квадратному или линейному.

Пример задания Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

РЕШЕНИЕ. Пусть собственная скорость байдарки равна x км/ч ($x > 3$). Тогда время (в часах) ее движения по течению реки равно $\dfrac{15}{x+3}$, а время ее движения против течения

реки равно $\frac{15}{x-3}$. Составим по условию задачи уравнение:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}+1\frac{1}{3}=8,$$

откуда

$$\frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}=\frac{20}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{x+3}+\frac{3}{x-3}=\frac{4}{3}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $3(x-3)(x+3)$, приходим к уравнению $18x=4(x^2-9)$, откуда $2x^2-9x-18=0$. Корнями уравнения являются числа $-1{,}5$ и 6, из которых только второе больше 3.

ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

С задачей справилось менее трети выпускников. Наибольшие трудности — в составлении уравнения по условию задачи и его решении; понимании того, что процент — это одна сотая часть величины; неумении записывать время, данное в часах и минутах, в виде обыкновенной дроби; неумении решать дробно-рациональные уравнения, неумении оптимизировать вычислительные сложности при решении уравнения, деля обе части уравнения на общий множитель его коэффициентов или избавляться от дробей. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание 12

Тип задания по кодификатору требований

Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания

Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке. Производная в некоторых задачах может быть задана графиком.

Комментарий

Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (мак-

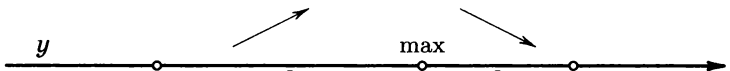
симума) заданной функции или ее наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При этом возможны два основных случая: либо производная задана графиком, либо функция задана формулой. Если производная задана графиком, то на тех промежутках, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех промежутках, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает. Точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс (т. е. точки, в которых производная меняет знак), являются точками экстремума. Если функция задана формулой, то при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Пример задания Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-12;\,-1]$.

РЕШЕНИЕ. Традиционное для школьника решение предполагает вычисление наибольшего значения данной функции

[redacted]

$y'>0$ при $x\in(-12;\,-5)$ и $y'<0$ при $x\in(-5;\,-1)$. Таким образом, непрерывная при $x<0$ функция $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ возрастает на отрезке $[-12;\,-5]$ и убывает на отрезке $[-5;\,-1]$. Значит, $\max\limits_{[-12;-1]} y(x)=y(-5)=-10$.



Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению. Ошибки (около трех четвертей сдававших) связаны с арифметическими действиями, неуверенным владением алгоритмом вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции (как в случае знакопостоянства производной на данном отрезке, так и в случае принадлежности точки экстремума данному отрезку).

Задания с развернутым решением

Общие рекомендации

- Каждое из заданий 13—19 оценивается 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл выставляется за полное обоснованное решение. При этом можно использовать любые утверждения и факты из школьных учебников без дополнительных обоснований или пояснений. Нужно постараться оформить решение так, чтобы оно было понятно не только его автору, но и любому другому компетентному человеку, в частности, проверяющему.
- Даже если полностью решить задачу не удается, нужно постараться продвинуться в ее решении, сделать хотя бы часть задачи: вполне вероятно, что потраченные усилия окажутся оцененными — разумеется, не максимальным числом баллов, но на Едином экзамене и один балл за задачу будет далеко не лишним.

Задание 13

Тип задания по кодификатору требований

Уравнение или система уравнений.

Характеристика задания

Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни.

Комментарий

Как правило, решение задачи требует замены переменной, позволяющей свести уравнение

к квадратному, и отбора корней, связанного с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней четной степени и логарифмов.

Пример задания а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

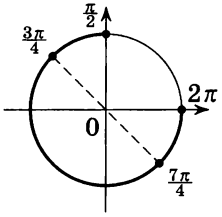
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие

зуя свойства степеней, в виде произведения:

$$2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}.$$

Поскольку $2^{\cos x} \neq 0$, получаем уравнение $7^{\cos x} = 7^{-\sin x}$. Таким образом, $\cos x = -\sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Это числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.



ОТВЕТ. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Примерно каждое шестое решение было оценено максимальным числом баллов — 15,4%. Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение) получил примерно каждый двенадцатый

Задание 14

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий Традиционная задача по стереометрии, связанная с вычислением длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.

Пример задания В правильной четырехугольной призме $A\ldots D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро $AA_1 = 2$. Точка O принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении $4:1$, считая от вершины A_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым, для построения сечения достаточно провести в плоскости верхнего основания призмы прямую, параллельную AC до пересечения с ребром B_1C_1 в точке P. Искомое сечение — трапеция $ACPO$ (рис. 1).

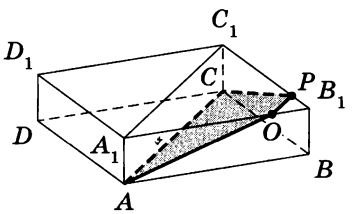


Рис. 1

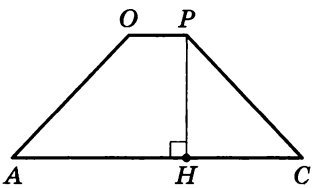


Рис. 2

б) Поскольку прямая AC параллельна A_1C_1, прямая OP параллельна прямой A_1C_1. Отсюда следует, что треугольники PB_1O и $C_1B_1A_1$ подобны, причем

$$B_1P : B_1C_1 = B_1O : B_1A_1 = OP : A_1C_1 = 1 : 5.$$

Значит,

$$AC = A_1C_1 = 10\sqrt{2}, \quad OP = 2\sqrt{2}.$$

В равных прямоугольных треугольниках CC_1P и AA_1O

$$CP = AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1O^2} = \sqrt{68},$$

значит, трапеция $ACPO$ равнобедренная.

Пусть PH — высота трапеции $ACPO$, проведенная к основанию (рис. 2), тогда:

$$CH = \frac{AC - OP}{2} = 4\sqrt{2}, \quad PH = \sqrt{CP^2 - CH^2} = 6,$$

$$S_{ACPO} = \frac{AC + OP}{2} \cdot PH = 36\sqrt{2}.$$

ОТВЕТ. $36\sqrt{2}$.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Примерно каждое пятидесятое решение оценено максимальным числом баллов и примерно столько же — одним баллом. Основные проблемы в зависимости от варианта: неумение анализировать пространственные конфигурации, использовать факты и теоремы, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей, неумение строить простейшие линейные углы и проекции, ошибки в определении вида треугольника, вычислительные ошибки.

Задание 15

Тип задания по кодификатору требований

Неравенство или система неравенств.

Характеристика задания

Неравенство или система неравенств, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).

Комментарий Обратим внимание на преобразования, с которыми связана значительная часть ошибочных решений задания 17. При решении неравенств, содержащих

деления его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно). Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних решений. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать необходимые ограничения (как иногда говорят, найти ОДЗ неравенства). Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов (то

неравенства. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

а) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

(в этом случае $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$);

б) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$

(при этом $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x))$).

Преобразуя разность логарифмов в логарифм частного и наоборот, поступают аналогично. Если есть выбор, лучше преобразовывать сумму (разность) логарифмов в логарифм произведения (частного), выписав необходимые ограничения (это позволит исключить посторонние решения), а не наоборот (при таком преобразовании решения будут потеряны). Так, при упрощении левой части неравенства

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) + \log_a \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant p(x)$$

переход к логарифму произведения с последующим сокраще-

нием алгебраической дроби с учетом необходимых ограничений, т. е. переход к системе

$$\begin{cases} \log_a f^2(x) < p(x), \\ f(x) \cdot g(x) > 0, \end{cases}$$

будет равносильным, а упрощение путем преобразования логарифмов произведения и частного в сумму и разность логарифмов соответственно соответственно может привести к потере решений.

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу

$$\log_a f^{2n} = 2n \cdot \log_a |f(x)|.$$

Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x, для которых $f(x) \neq 0$, а правая часть — при всех x, для которых $f(x) > 0$. Тогда область определения левой части окажется шире, что может привести к потере решений соответствующего неравенства. Так, например, при решении неравенства $\log_5 f^2(x) > 2$ переход к неравенству $2 \log_5 f(x) > 2$ будет означать потерю решений; правильным в этом случае будет переход к неравенству $2 \log_5 |f(x)| > 2$ или сразу к неравенству $f^2(x) > 5^2$.

Особое внимание следует также уделить применению метода интервалов и методам решения логарифмических неравенств. Логарифмические неравенства с переменным основанием можно решать «традиционным» способом, рассматривая два случая (основание больше 1, основание положительно и меньше 1). Второй способ — применение метода интервалов. Третий способ основан на следующих простых утверждениях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если числа p и q одного знака (т. е. $pq > 0$), то и числа pr и qr $(r \neq 0)$ — одного знака; обратно, если числа pr и qr одного знака, то и числа p и q одного знака.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $a > 0$, $b > 1$, то числа $\log_b a$ и $a - 1$ одного знака.

Утверждение 1 означает, что если числа p и q одного знака, то неравенства $pr > 0$ и $qr > 0$ равносильны. Вместе с утвер-

ждением 2 это позволяет при решении логарифмических неравенств вида $r(x)\log_{c(x)}a(x)>0$ переходить (разумеется, записав необходимые ограничения) сначала к неравенству $r(x)\dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)}>0$ (где b — любое число, большее 1), а затем к неравенству $r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1}>0$. Таким образом, неравенство $r(x)\dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)}>0$ равносильно системе

$$\begin{cases} r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1}>0, \\ a(x)>0, \\ c(x)>0. \end{cases}$$

При необходимости такой переход можно сделать несколько раз. Описанный алгоритм справедлив и для неравенств противоположного знака и для нестрогих неравенств. Кроме того, при решении логарифмических неравенств часто оказывается полезным и следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $a>0$, $b>0$, $c>1$, то числа $\log_c a-\log_c b$ и $a-b$ одного знака.

Сформулированные утверждения применимы к неравенствам, правая часть которых равна нулю, а левая представляет собой произведение или частное нескольких алгебраических множителей. В некоторых случаях такие множители можно заменить более простыми, имеющими те же знаки (точнее, те же промежутки знакопостоянства), что и заменяемые (поэтому такой метод решения неравенств будем называть методом знакотождественных множителей). Кроме указанных выше, к таким парам можно отнести следующие:

$$|a|-|b| \quad \text{и} \quad a^2-b^2, \qquad \sqrt[2n]{a}-\sqrt[2n]{b} \quad \text{и} \quad a-b$$

(при условиях $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$),

$$\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n+1]{b} \quad \text{и} \quad a-b,$$

$$\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b} \quad \text{и} \quad a+b,$$

$$l^a-l^b \quad \text{и} \quad a-b$$

(при условии $l>1$).

Пример задания Решите неравенство

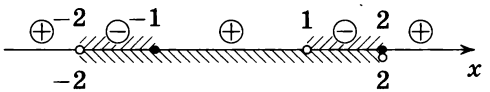
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$$

РЕШЕНИЕ. Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\leqslant 0, \\ -2<x<2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0, \\ -2<x<2. \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



ОТВЕТ. $(-2;-1]\cup(1;2)$.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года Правильных решений, оцененных максимальным числом баллов — примерно одно на 25, а каждый седьмой выпускник получил один балл. Основные проблемы: неумение решать логарифмические неравенства, арифметические ошибки, плохое знание свойств логарифмов и свойств неравенств, неумение выполнять замену переменной, ошибки при обратной замене.

Задание 16

Тип задания по кодификатору требований Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

Характеристика задания Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.

Комментарий Довольно сложная задача, либо с двумя вопросами (один из которых — на доказательство), либо требующая рассмотрения двух случаев и приводящая к двум разным ответам.

Пример задания Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 49 см^2 и 36 см^2.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

б) Найдите площадь трапеции.

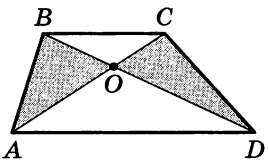
РЕШЕНИЕ. а) В условии задачи не сказано, какие стороны трапеции являются ее боковыми сторонами, а какие — основаниями. Докажем вначале, что площади двух треугольников, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей трапеции, а основаниями служат боковые стороны, равны (см. рис.) Площади треугольников ABD и ACD равны, поскольку эти треугольники имеют общее основание AD, и их высоты, проведенные к этому основанию, равны как высоты трапеции. Но тогда

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD},$$

что и требовалось. По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Следовательно, треугольники AOB и COD являются треугольниками, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей данной трапеции, а основаниями служат ее боковые стороны. Значит, их площади равны.

б) Треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{7}{6} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведенную из вершины B, то отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{7}{6}$. Значит, $S_{ABO} = \frac{7}{6} S_{CBO} = \frac{7}{6} \cdot 36 = 42$. Поэтому

и $S_{COD} = 42$. Но тогда $S_{ABCD} = 49 + 36 + 42 + 42 = 169$ см^2.



ОТВЕТ. 169 см^2.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Решений, оцененных максимальным числом баллов — примерно одно на 500. Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение) — у примерно 1 из 50 выпускников. Наибольшие проблемы: понимание логики задачи и анализ условия, неумение искать ключевые факты и делать необходимые обоснования, применять свойства функций и строить графики, использовать геометрические интерпретации.

Задание 17

Тип задания по кодификатору требований

Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.

Характеристика задания

Текстовая задача на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, обычно с экономическим содержанием.

Комментарий

Относительно сложная текстовая задача, связанная с банковскими кредитами, оптимизацией производства или затрат на него.

Пример задания

Денис планирует взять ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) в банке на несколько лет под 10 % годовых. Это означает,

что каждый год он должен возвращать банку часть кредита, равную сумме кредита, деленной на число лет пользования кредитом (погашать кредит) и выплачивать банковские проценты за пользование кредитом, сумма выплат по которым подсчитывается по следующей схеме: ежегодная сумма процентов, выплачиваемых Денисом, равна 10 % от непогашенной суммы кредита. Так, если кредит взят на 5 лет, то за первый год пользования кредитом Денис должен выплатить 10 % от всей суммы кредита, за второй год — 10 % от непогашенной суммы кредита, т. е. от 4/5 суммы кредита и т. п. При оформлении кредита банк предложил Денису выплачивать кредит ежемесячными равными платежами (аннуитетные платежи). Ежемесячный платеж по такой схеме рассчитывается следующим образом: сумма кредита и сумма процентов за все время пользования кредитом суммируются и делятся на число месяцев пользования кредитом. Денис принял предложение банка. Чему равна сумма кредита, взятого Денисом, если известно, что сумма ежемесячного платежа равна 30000 рублей, а сумма выплачиваемых процентов оказалась равной сумме кредита?

РЕШЕНИЕ. 1. Пусть сумма кредита равна S, годовые составляют k %, число лет кредита равно n. Тогда сумма выплат по процентам равна

$$S\frac{k}{100}+\left(S-\frac{S}{n}\right)\frac{k}{100}+\left(S-\frac{2S}{n}\right)\frac{k}{100}+\ldots+\left(S-\frac{(n-1)S}{n}\right)\frac{k}{100}.$$

Вынесем за скобку $S\frac{k}{100n}$. Получим

$$S\frac{k}{100n}(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1).$$

В скобках осталась сумма первых n натуральных чисел, которую можно найти по формуле суммы арифметической прогрессии. Эта сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом, сумма процентов, которые Денис должен выплатить банку, равна $S\frac{k(n+1)}{200}$ рублей.

2. По условию сумма процентов равна сумме кредита. Следовательно, $S\frac{k(n+1)}{200}=S$, откуда $k(n+1)=200$. Поскольку $k=10$, получим, что $n=19$.

3. Сумма l ежемесячного платежа по аннуитетной схеме равна

$$\frac{S+S\frac{k(n+1)}{200}}{12n},$$

откуда

$$l=\frac{S(kn+k+200)}{2400n}, \quad \text{а} \quad S=\frac{2400ln}{kn+k+200}.$$

Так как $k=10$, $n=19$, $l=30000$, находим, что

$$S=\frac{2400ln}{400}=6ln=6\cdot 19\cdot 30\,000=3\,420\,000 \text{ рублей.}$$

ОТВЕТ. 3 420 000 рублей.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Новая для ЕГЭ по математике задача вызвала довольно значительные затруднения, с ней справился примерно каждый десятый выпускник и примерно такое же число выпускников получило хотя бы один балл за эту задачу. Трудности связаны с неумением анализировать и интерпретировать условие, слабыми вычислительными навыками, плохо усвоенной темой «проценты».

Задание 18

Тип задания по кодификатору требований

Уравнение, неравенство или система уравнений или неравенств.

Характеристика задания

Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий

Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу

или хотя бы продвинуться в решении этой задачи как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, четность и нечетность, требует умения находить область определения, множество значений и строить графики основных элементарных функций.

Пример задания Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2,$$

и рассмотрим графики функций

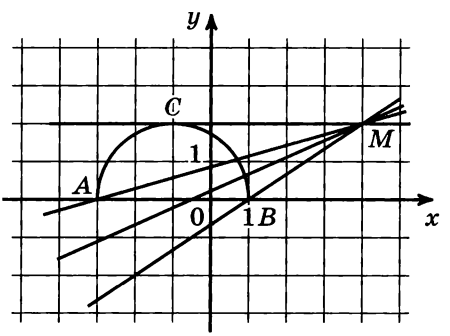
$$y=\sqrt{3-2x-x^2} \quad \text{и} \quad y=-ax+4a+2.$$

Поскольку правая часть в формуле $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2=3-2x-x^2 \\ y\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2=4, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Значит, графиком функции $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ является та часть окружности $(x+1)+y^2=4$, ординаты точек которой неотрицательны, т. е. полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1;0)$, расположенная не ниже оси абсцисс. Эта полуокружность имеет с осью абсцисс общие точки $A(-3;0)$ и $B(1;0)$. Графиком функции $y=-ax+4a+2$ является прямая, которая

при любом значении параметра проходит через точку $M(4; 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, если прямая $y = -ax + 4a + 2$ пересекает полуокружность в единственной точке. Последнее возможно, если эта прямая касается полуокружности, либо расположена между прямыми MA и MB (см. рис.) так, что ее угловой коэффициент $-a \in (a_1; a_2]$, где a_1 и a_2 — угловые коэффициенты прямых MA и MB соответственно. Поскольку наиболее удаленная от оси абсцисс точка C имеет ту же ординату, что и точка M, то прямая MC, параллельная оси абсцисс, будет касательной к полуокружности. В этом случае $a = 0$. Найдем теперь a_1 и a_2. Поскольку точка $A(-3; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0 = 3a + 4a + 2$, откуда $a = -\frac{2}{7}$. Таким образом, $a_1 = \frac{2}{7}$. Поскольку точка $B(1; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0 = -a + 4a + 2$, откуда $a = -\frac{2}{3}$. Таким образом, $a_2 = \frac{2}{3}$. Значит, $-a \in (a_1; a_2]$, если $\frac{2}{7} < -a \leqslant \frac{2}{3}$, откуда $-\frac{2}{3} \leqslant a < -\frac{2}{7}$.



ОТВЕТ. $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Решений, оцененных максимальным числом баллов — примерно одно на 500. Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение) — одно решение на примерно 50. Наибольшие проблемы: понимание логики задачи и анализ условия, неумение искать ключевые факты и делать необходимые обоснования, применять свойства функций и строить графики, использовать геометрические интерпретации.

Задание 19

Тип задания по кодификатору требований

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

Характеристика задания

Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

Комментарий

Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определенный уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Ответ на первый вопрос задачи по силам большинству успевающих учеников, главное здесь — не испугаться условия, дочитать его до конца и немного подумать.

Пример задания

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

РЕШЕНИЕ. *а*) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29 - 5 - 6 - 8 = 10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

ОТВЕТ. а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Краткий анализ выполнения аналогичного задания по результатам 2015 года

Решений, оцененных максимальным числом баллов — примерно одно на 500. Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение) — одно решение на примерно 15. Наибольшие проблемы: понимание логики задачи и анализ условия, неумение использовать свойства целых чисел, делать необходимые обоснования и выводы. Значительный процент участников экзамена не приступил к решению задачи.

Диагностические работы за курс 10 класса

Ответом к заданиям с кратким ответом 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

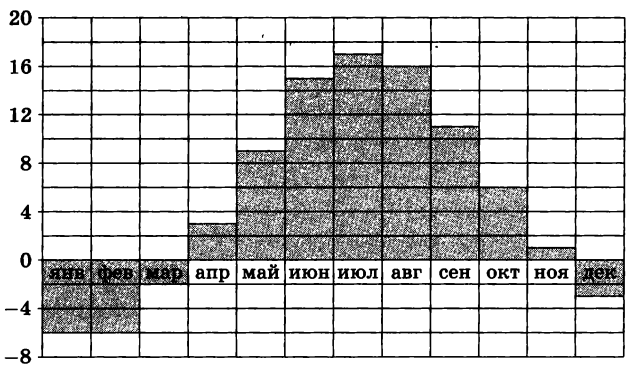
Для записи решений и ответов к заданиям с развернутым решением 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания 13, 14 и т. д., а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №1

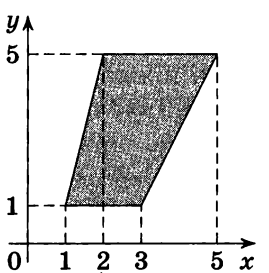
Часть 1

1 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20 %, а длину увеличили на 20 %. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 1), (2; 5), (5; 5), (3; 1).

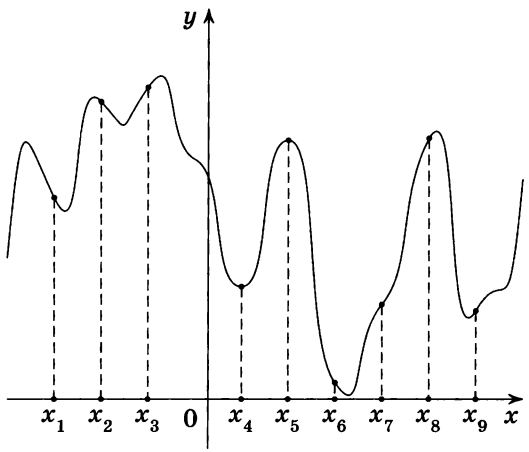


4 На тарелке 30 пирожков: 3 с мясом, 18 с капустой и 9 с вишней. Саша наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{x-24}{x-3}=-2$.

6 Даны два смежных угла. Биссектриса первого из них образует угол 43° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



8 Площадь поверхности куба равна 50. Найдите его диагональ.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(-1\frac{8}{9}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 8{,}64$.

10 Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p=500$ рублей за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=300$ рублей, постоянные расходы предприятия $f=700\,000$ рублей в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=$ $=q(p-v)-f$. Определите наименьший месячный объем

производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500 000 рублей.

11 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 440 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 28\operatorname{tg} x - 28x - 7\pi + 7 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x - x^2} \leqslant 0.$$

16 Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырехугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

б) Найдите ее радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

17 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Андрей переводит в банк 3 460 600 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

18 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-5, -2, 1, 3, 4, 6, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

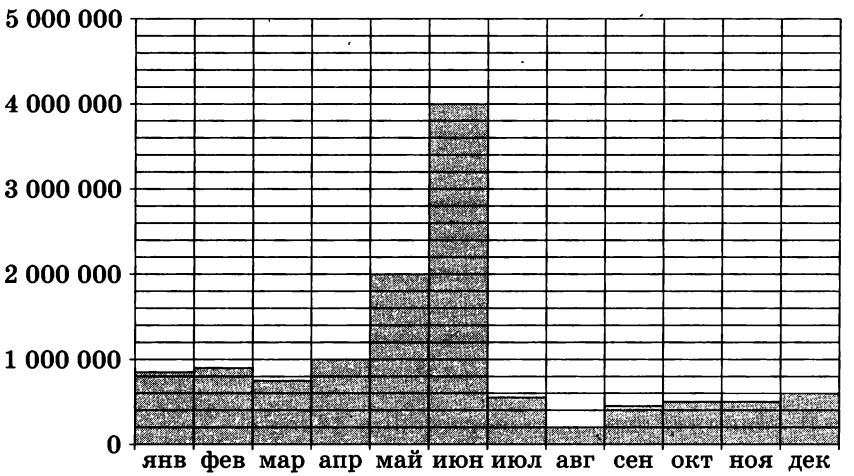
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа №2

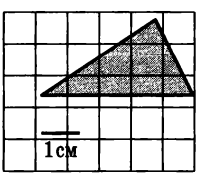
Часть 1

1 Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 56 км/ч? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда число запросов со словом ЕГЭ превышало 800 000.



3 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

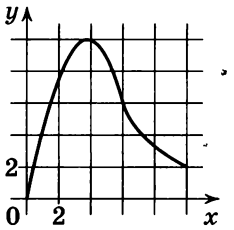


4 В каждой партии из 1000 лампочек в среднем 20 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+5) = \log_3(2x-17)$.

6 В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 34, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

7 Материальная точка движется вдоль прямой от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



8 Высота правильной четырехугольной пирамиды в два раза меньше диагонали основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $44 \log_2 \frac{\sqrt{4}}{2}$.

10 Для определения эффективной температуры звезд исполь-

а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}71 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

11 На изготовление 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1-x^2}$

13 а) Решите уравнение $8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость BDD_1 перпендикулярна отрезку AC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

15 Решите неравенство $7\log_9(x^2 - x - 6) \leqslant 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3}$.

16 В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырехугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

17 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leqslant |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Подготовка к части 1 ЕГЭ по математике. Задачи 1–8

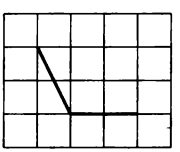
Ответом к заданиям части 1 (1—8) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

Диагностическая работа №3

1 Шесть килограммов огурцов стоят столько же, сколько пять килограммов помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?

2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций металлургической компании в первые две недели октября (по горизонтальной оси откладываются числа октября, по вертикальной — стоимость одной акции в рублях). 3 октября бизнесмен приобрел 30 акций этой компании. 18 из них он продал 10 октября, а 12 октября продал остальные 12. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его тангенс.

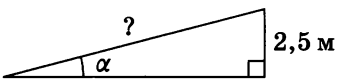


4 Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во

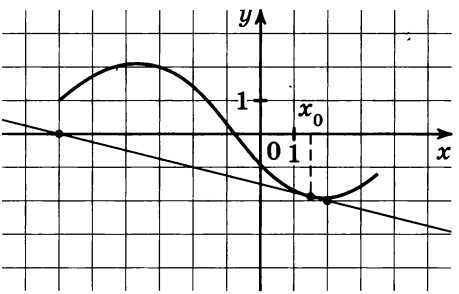
второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

5 Найдите корень уравнения $\log_2(3-x)=-1$.

6 При проектировании торгового центра запланирована постройка эскалатора для подъема на высоту 2,5 м под углом α к горизонту. Найдите длину эскалатора (в метрах), если $\sin\alpha=0{,}2$.



7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0.

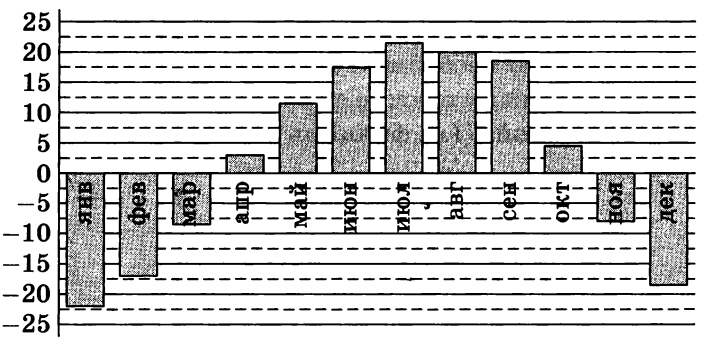


8 Бильярдный шарик весит 360 г. Сколько граммов будет весить шар вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же материала?

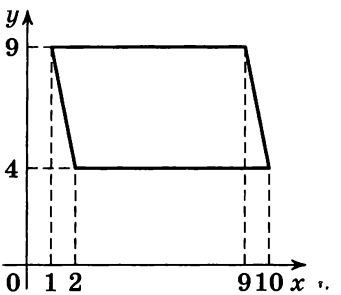
Диагностическая работа №4

1 Сырок стоит 6 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске положительна.



3 Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



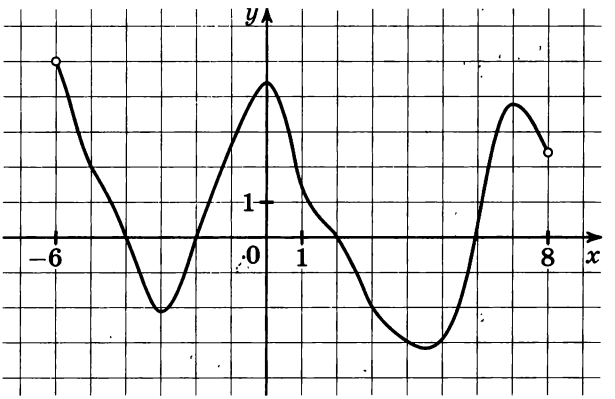
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости (2 кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}=9$.

6 Человек, рост которого равен 1 м 70 см, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина

тени человека равна 1 м 19 см, а длина тени дерева равна 2 м 80 см.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(-6; 8)$. В скольких целых точках производная функции положительна?



8 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 20, а диагональ основания равна 24. Найдите высоту пирамиды.

Задача 1

Подготовительные задания

1 Горные лыжи стоят 16 000 рублей. Сколько рублей будут стоить горные лыжи во время сезонной распродажи, когда на них объявлена скидка 20 %?

2 Билет в ботанический сад стоит 50 рублей. Сколько рублей сдачи нужно получить с 2000 рублей, заплаченных за проход 36 человек?

3 Килограмм груш дороже килограмма яблок на 25 %. На сколько процентов килограмм яблок дешевле килограмма груш?

4 Билет в музей стоит 150 рублей. Сколько билетов можно купить на 1300 рублей?

5 Брюки стоят 3000 рублей, а рубашка — 1200 рублей. На сколько процентов рубашка дешевле брюк?

6 Пластиковый стаканчик с йогуртом стоит 7 рублей 60 копеек. Какое максимальное количество таких стаканчиков можно купить на 50 рублей?

7 В июне завод выпустил 800 приборов. В августе производство снизилось на 15 %, а в сентябре — еще на 10 %. Сколько приборов завод выпустил в сентябре?

8 134 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 2 кг, 5 кг и 9 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется для этого?

9 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки его длину и ширину увеличили на 20 %. На сколько процентов увеличилась площадь участка после утверждения плана застройки?

10 Больному прописан курс лекарства, которое нужно пить по 0,5 г три раза в день в течение трех недель. В одной упаковке содержится 10 таблеток по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс?

Зачетные задания

1 Призерами городской олимпиады по математике стало 48 учеников, что составило 12 % от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

2 Большой корабль не может подойти к берегу, поэтому пассажиров отвозят с корабля на шлюпке, вмещающей 8 пассажиров. Сколько раз шлюпка приставала к берегу, если на берег отвезли 30 пассажиров?

3 Среди 160 000 жителей города 55 % не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 90 % смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

4 Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

5 Зубная паста стоит 120 рублей, а стиральный порошок — 174 рубля. На сколько процентов стиральный порошок дороже зубной пасты?

6 Выпускники 11 «Б» класса покупают букеты цветов для последнего звонка: из 5 роз каждому учителю и из 7 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить цветы 18 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по цене 25 рублей за штуку. Сколько рублей потребуется для покупки?

7 Три рубашки дешевле куртки на 10 %. На сколько процентов четыре рубашки дороже куртки?

8 Есть 730 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно добавить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 48 теннисистами?

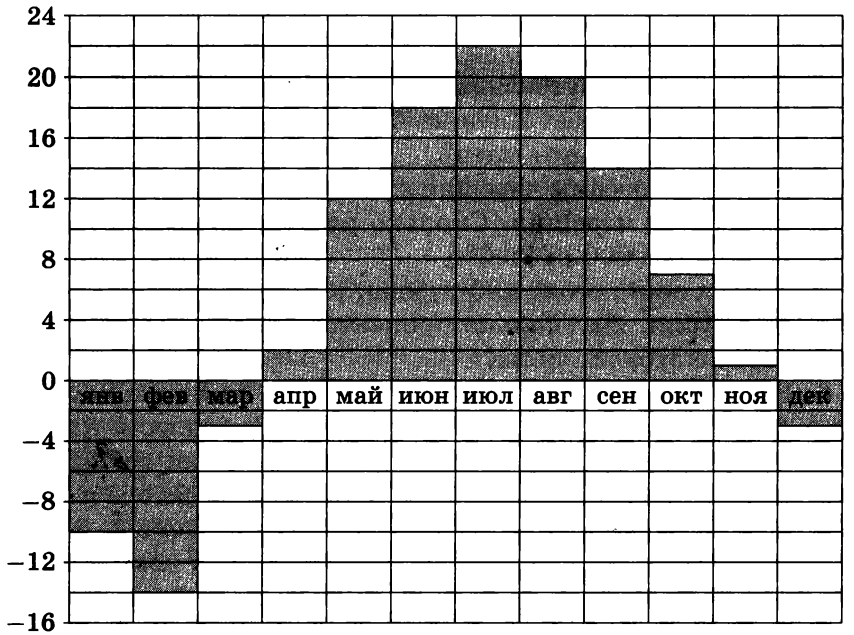
9 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20 %, а длину уменьшили на 10 %. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

10 В летнем лагере на каждого участника полагается 50 г сахара в день. В лагере 163 человека. Сколько килограммовых пачек сахара достаточно на неделю?

Задача 2

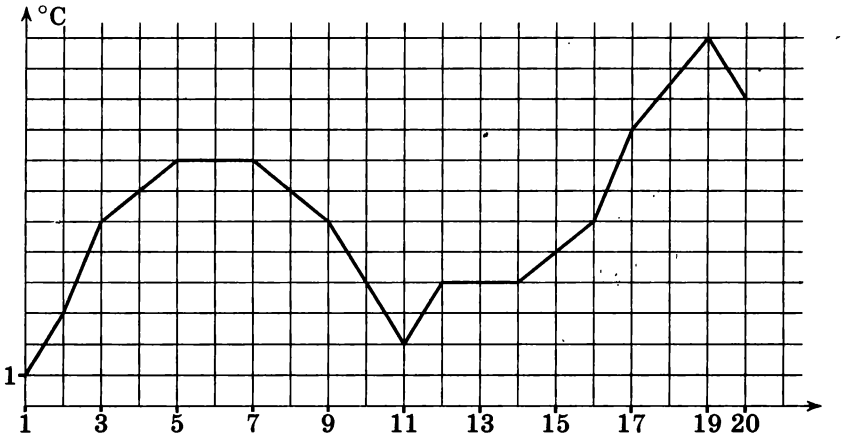
Подготовительные задания

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



1 Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.
2 Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.
3 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году с отрицательной среднемесячной температурой.
4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура превышала 10°C.

На рисунке изображен график колебания температуры в течение первых 20 дней апреля. По горизонтальной оси отложены дни, а по вертикальной — среднесуточная температура воздуха.



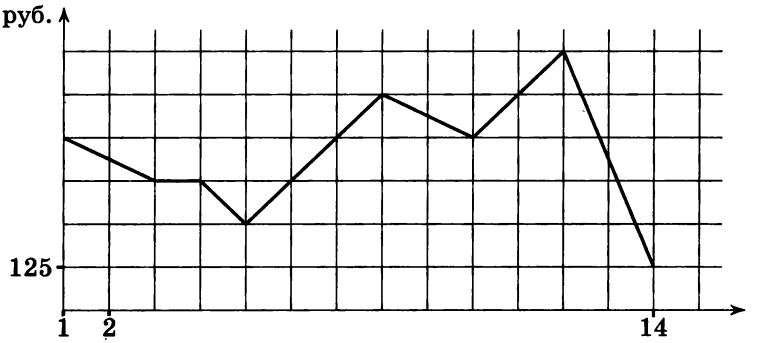
5 Какой была среднесуточная температура воздуха 6 апреля? Ответ дайте в градусах Цельсия.

6 Какого числа среднесуточная температура воздуха в первый раз достигла 7 °C?

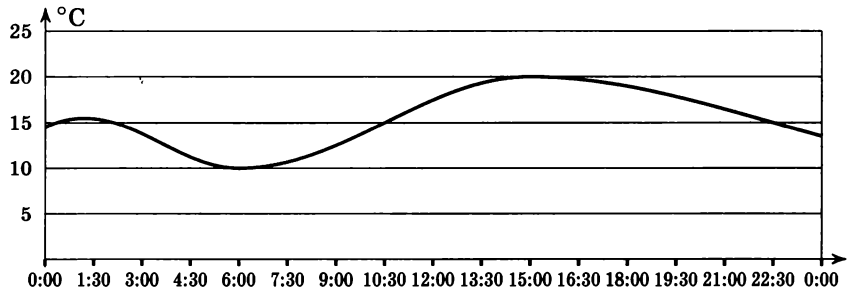
7 Какого числа среднесуточная температура воздуха была максимальной?

8 Какого числа среднесуточная температура воздуха была минимальной?

9 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели февраля. В первую неделю февраля бизнесмен купил 12 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

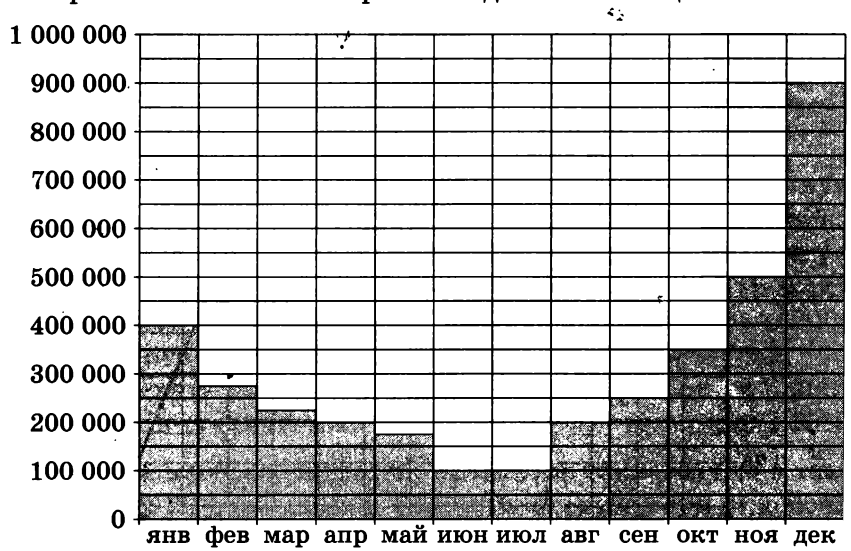


10 На графике изображено изменение температуры воздуха в пункте A на протяжении суток 17 августа. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику разность максимальной и минимальной температур в течение этих суток (в градусах Цельсия).



Зачетные задания

На диаграмме показано число запросов со словом СНЕГ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы по вертикали — число запросов за данный месяц.



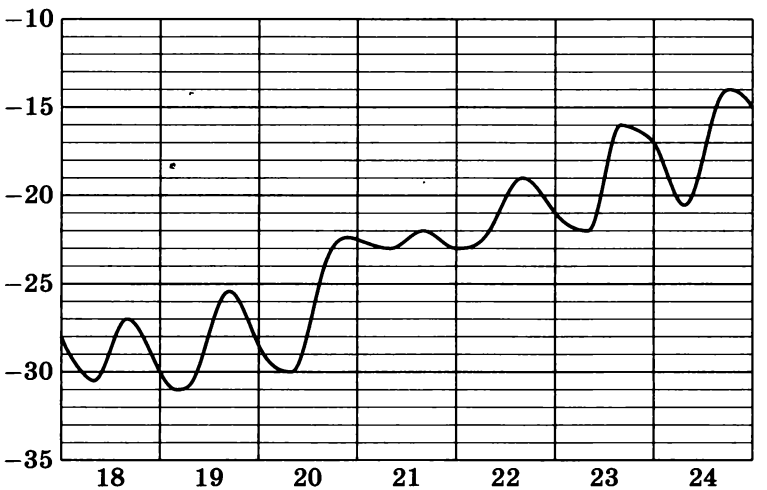
1 Определите по диаграмме максимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в период с января по октябрь 2009 года.

2 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ было равно 200 000.

3 Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов превышало минимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в 2009 году.

4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ не превосходило 300 000.

На рисунке примерно показано изменение температуры воздуха в Москве с 18 по 24 января 2006 года. По горизонтали указываются числа января, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

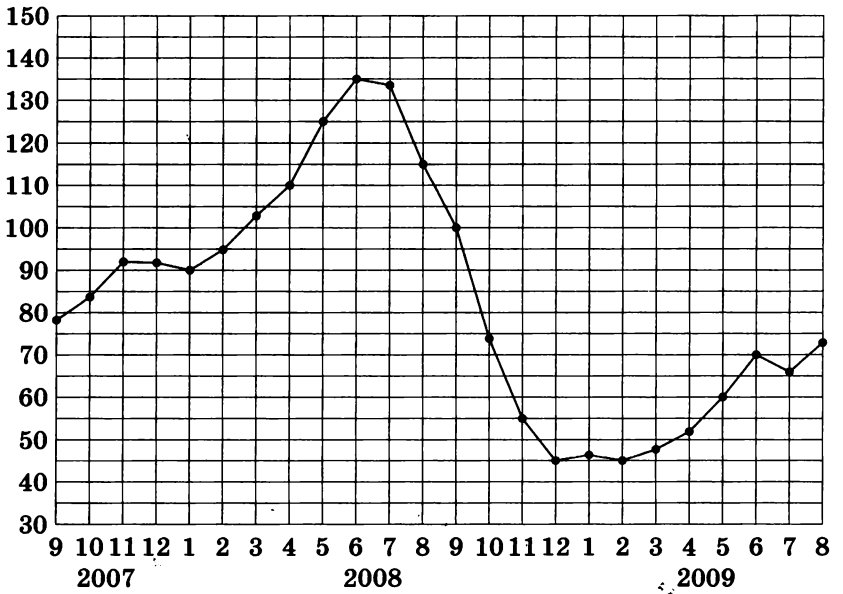


5 Определите по рисунку, какова была наименьшая температура воздуха за указанный период (в градусах Цельсия).

6 Определите по рисунку, какова была наибольшая температура воздуха 22 января (в градусах Цельсия).

7 Найдите разность между наибольшей и наименьшей температурой за указанный период (в градусах Цельсия).

На рисунке жирными точками показана среднемесячная цена нефти с сентября 2007 по август 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



8 Определите по рисунку, какой была среднемесячная цена нефти в мае 2009 года (в долларах за баррель).

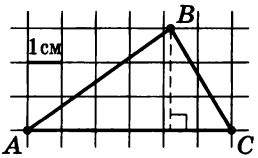
9 Определите по рисунку, во сколько раз наибольшая среднемесячная цена нефти за указанный период превосходила ее наименьшую среднемесячную цену.

10 Определите по рисунку наименьшую среднемесячную цену нефти в период с ноября 2007 по сентябрь 2008 года (в долларах за баррель).

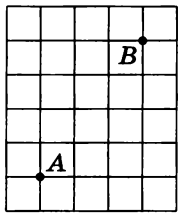
Задача 3

Подготовительные задáния

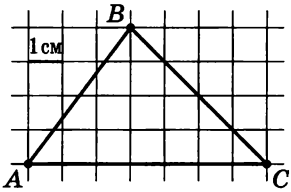
1 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник ABC (см. рис.). Найдите длину высоты h, проведенной из вершины B, в сантиметрах.



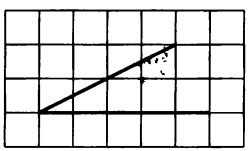
2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



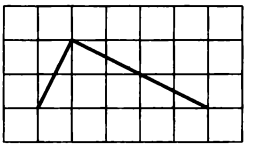
3 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



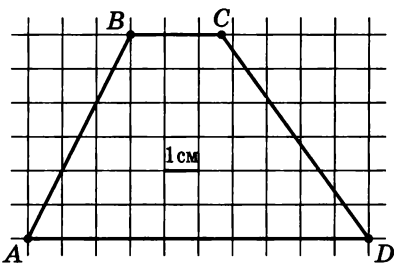
4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображен угол. Найдите его тангенс.



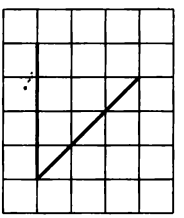
5 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.



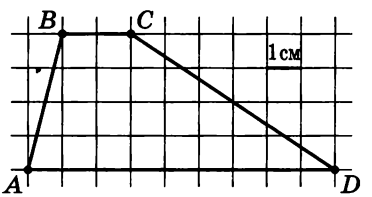
6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее высоту в сантиметрах.



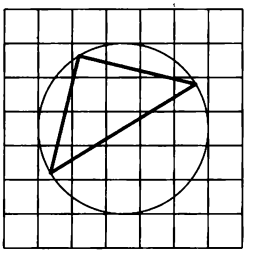
7 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.



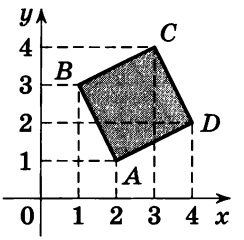
8 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



9 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.

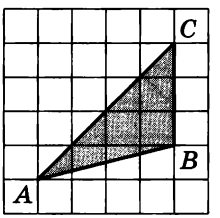


10 Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (2; 1), (1; 3), (3; 4), (4; 2).

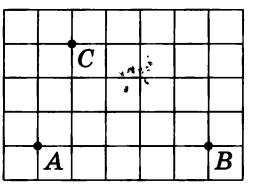


Зачетные задания

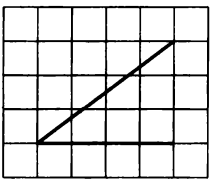
1 Найдите площадь треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



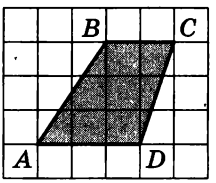
2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.



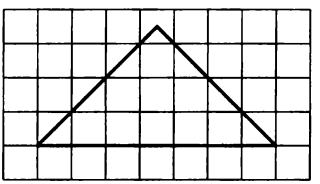
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его синус.



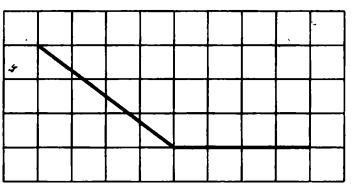
4 Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



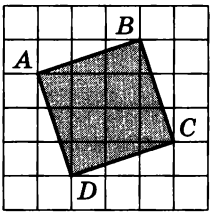
5 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его биссектрисы, проведенной к гипотенузе.



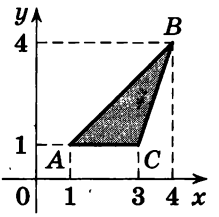
6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его косинус.



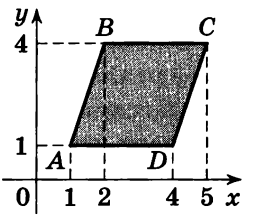
7 Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



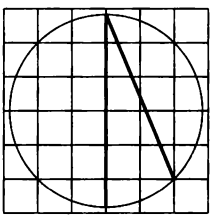
8 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (4; 4), (3; 1).



9 Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 1), (2; 4), (5; 4), (4; 1).



10 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.



Задача 4

Подготовительные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске монеты выпадет орел.

2 Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков на первом выпадет меньше 4 очков, а на втором — ровно 6 очков.

3 В среднем на 50 карманных фонариков приходится семь неисправных. Найдите вероятность покупки неисправного фонарика.

4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не попадется вопрос по производной.

5 На чемпионате по прыжкам с шестом выступают 30 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Швеции и 7 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что тринадцатым будет выступать прыгун из Швеции.

6 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

7 На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

8 Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

9 Коля и Толя играют в кости. Они бросают кубик по одному разу, выигрывает тот, у кого выпадет больше очков. Первым бросил Коля, у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что Толя не выиграет.

10 В классе 12 мальчиков и 13 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить мальчик и девочка.

Зачетные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске кубика выпадет четное число очков.

2 Найдите вероятность того, что при броске двух монет выпадет ровно одна решка.

3 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 5 участников из России, в том числе Кирилл Черноусов. Найдите вероятность того, что в первом туре Кирилл Черноусов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

4 В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

5 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

6 Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

7 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность

уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

8 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

9 Катя и Настя бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпало больше очков. Ничья, если очков поровну. Первой бросила Катя, у нее выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что Настя проиграет.

10 На турнир по настольному теннису прибыло 26 участников, в том числе близнецы Тоша и Гоша. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбивают на две группы по 13 человек. Какова вероятность того, что Тоша и Гоша окажутся в одной группе?

Задача 5

Подготовительные задания

1 Решите уравнение $26 - 13x = 0$.

2 Решите уравнение $\sqrt{x} = 7$.

3 Решите уравнение $\log_5 x = 2$.

4 Решите уравнение $\sqrt{x} = 0{,}3$.

5 Решите уравнение $\log_2 x = -3$.

6 Решите уравнение $2^x = 16$.

7 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$.

8 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$.

9 Решите уравнение $5^{-x} = 125$.

10 Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 6$.

Зачетные задания

1 Решите уравнение $(2x+7)^2 = (2x-5)^2$.

2 Решите уравнение $\frac{5x-4}{6} = \frac{4x-5}{5}$.

3 Решите уравнение $(x-8)^2 = -32x$.

4 Решите уравнение $\frac{1}{11}x^2 = 9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5 Решите уравнение $\frac{1}{x+2} = \frac{2}{x}$.

6 Решите уравнение $\sqrt{20-3x} = \sqrt{5}$.

7 Решите уравнение $\sqrt{11+5x} = x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

8 Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{12} = -0{,}5$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

9 Найдите корень уравнения $2^x \cdot 3^x = 36^{x-4}$.

10 Найдите корень уравнения $2\log_4(3x-5) = \log_2(15-x)$.

Задача 6

Подготовительные задания

1 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если $BK : KA = 6 : 5$, $KM = 18$.

2 В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен 60°, гипотенуза равна 19. Найдите меньший катет этого треугольника.

3 В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Найдите AO, если $CO = 27$, $DC = 30$, $AB = 20$.

4 Один из углов параллелограмма на 56° меньше другого угла. Найдите величину тупого угла параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

5 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите BC, если $AB = 13$.

6 Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 23, а расстояние от точки B до прямой l равно 45. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7 Один из углов выпуклого двенадцатиугольника равен 13°. Найдите сумму остальных его углов. Ответ дайте в градусах.

8 Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $7 : 8$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

9 Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 12.

10 Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 11, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Зачетные задания

1 Даны два смежных угла, один из которых равен 34°. Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной. Ответ дайте в градусах.

2 Найдите угол B треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 123°. Ответ дайте в градусах.

3 Одно из оснований трапеции в 6 раз меньше ее средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

4 Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 11°. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

5 Угол между двумя высотами ромба, проведенными из вершины тупого угла, равен 67°. Найдите острый угол ромба. Ответ дайте в градусах.

6 Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угол BAC, если угол BOC равен 127°. Ответ дайте в градусах.

7 Отрезки AB и BC являются соответственно диаметром и хордой окружности с центром O. Найдите угол AOC, если угол ABC равен 67°. Ответ дайте в градусах.

8 В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите угол ACD, если углы BAD и ADB равны соответственно 56° и 78°. Ответ дайте в градусах.

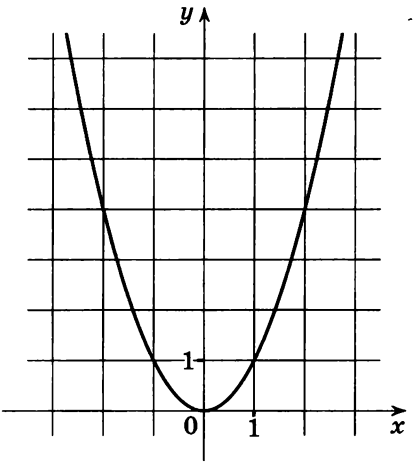
9 В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 7.

10 Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 60°, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 10.

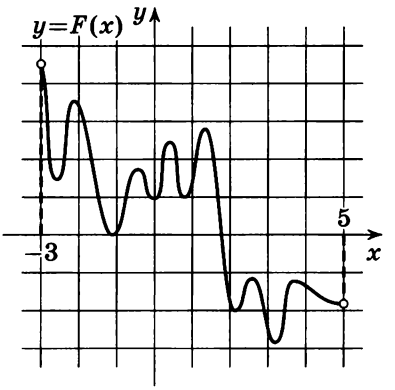
Задача 7

Подготовительные задания

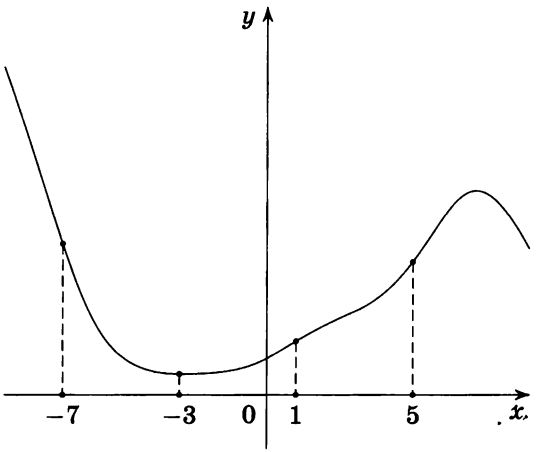
1 На рисунке изображен график функции $y = x^2$. Нарисуйте касательную к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 2$. (Используйте уравнение касательной.)



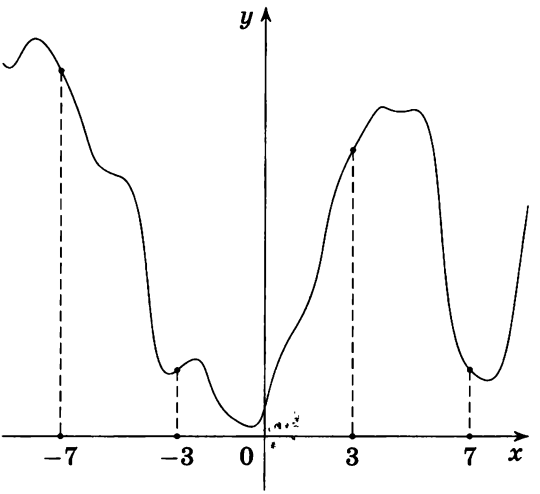
2 На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



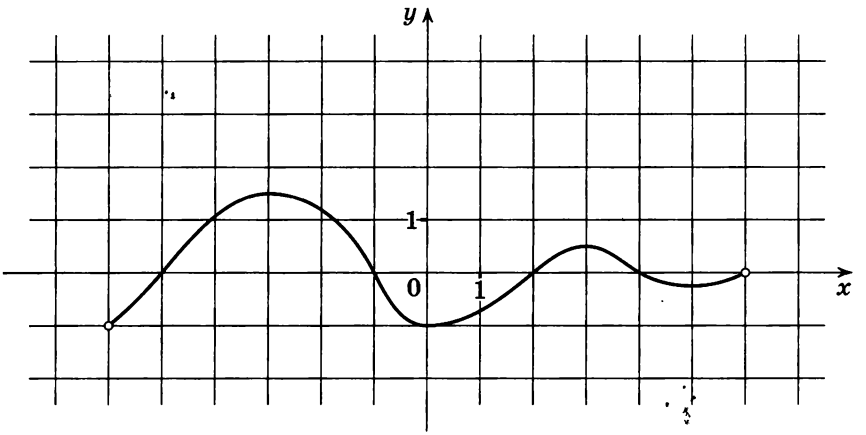
3 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 5. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



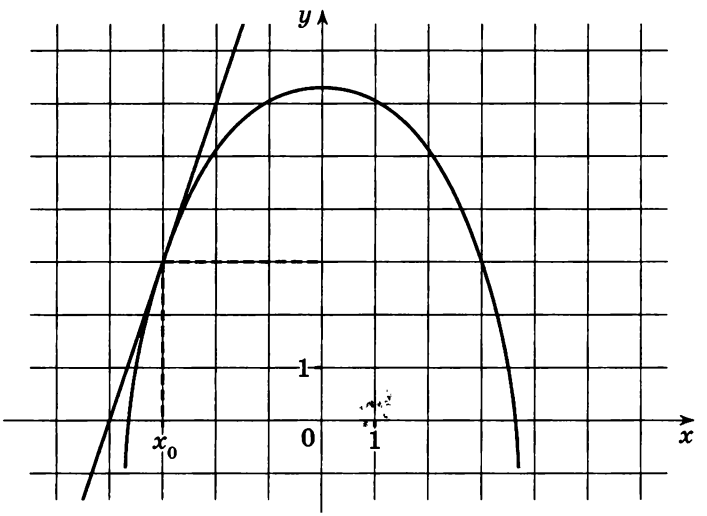
4 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наименьшее? В ответе укажите эту точку.



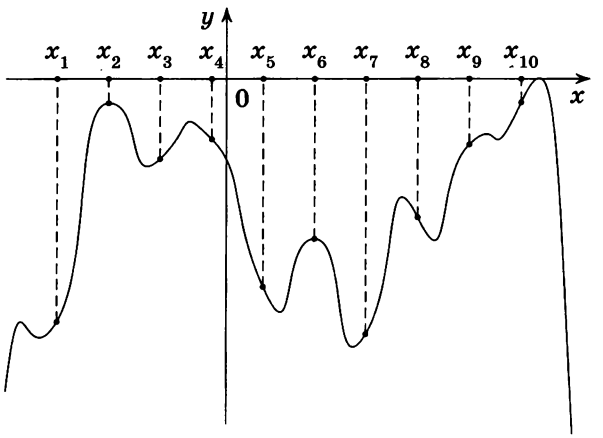
7 Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-6; 6]$. На рисунке изображен график ее производной $y = f'(x)$. Найдите наибольшую длину промежутка возрастания функции $f(x)$.



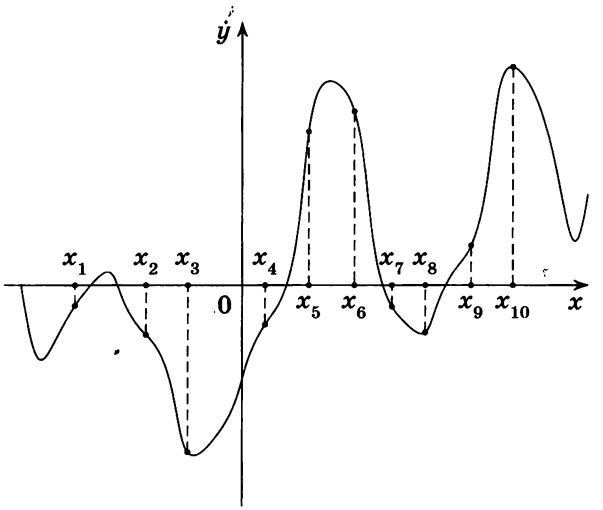
8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



9 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

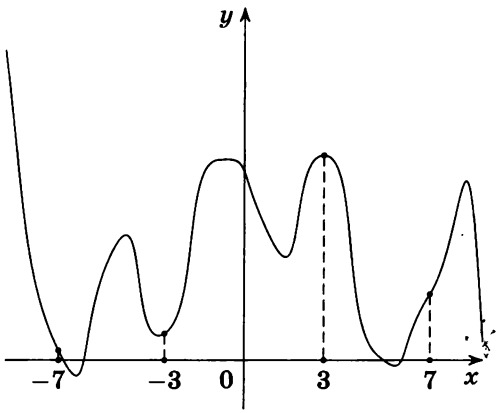


10 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

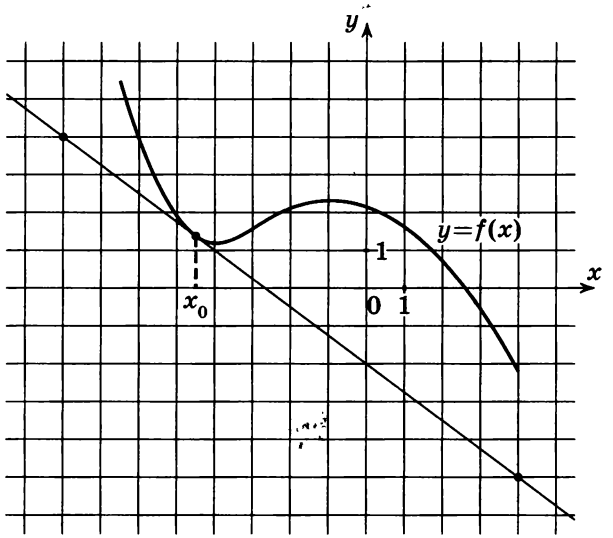


Зачетные задания

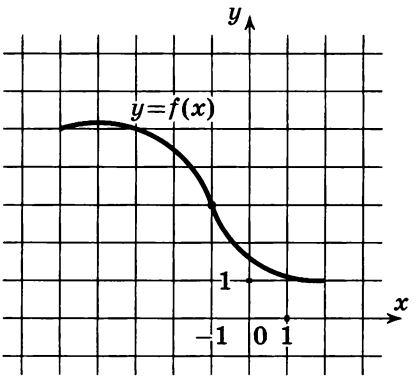
1 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



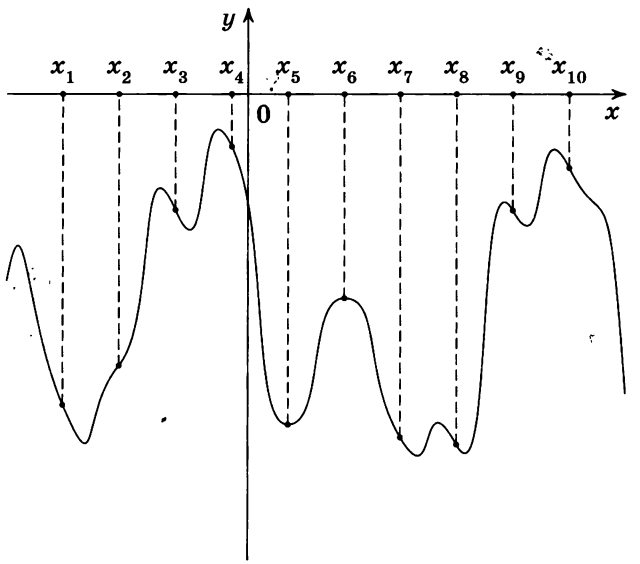
2 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



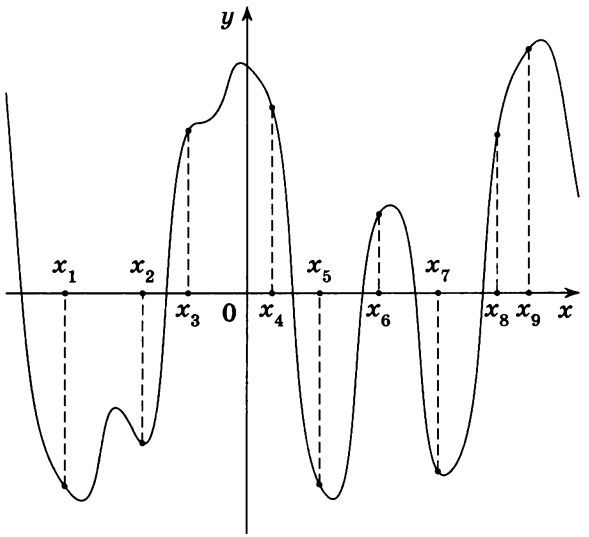
3 На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой -1, проходит через начало координат. Найдите $f'(-1)$.



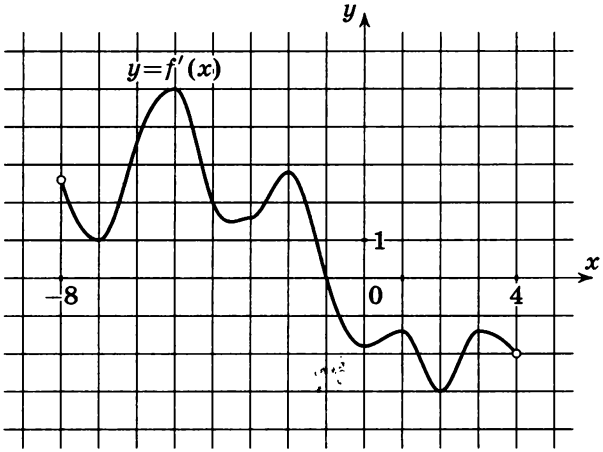
4 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



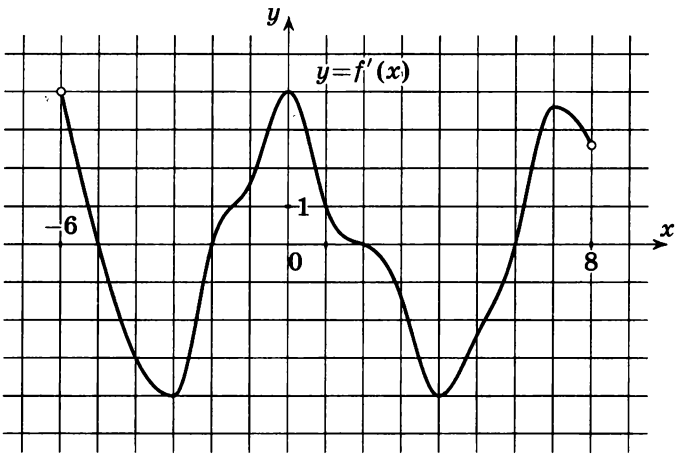
5 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



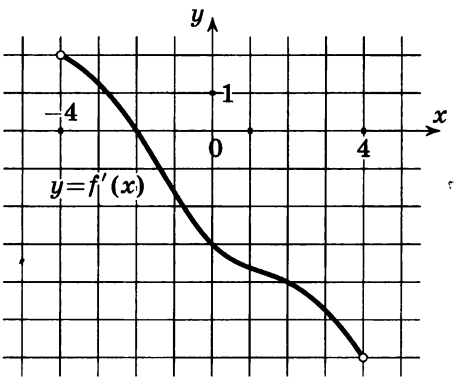
6 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



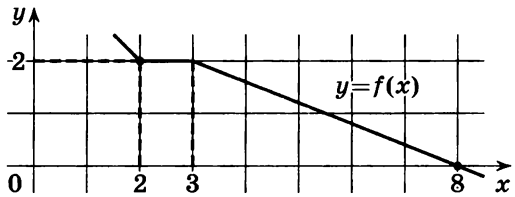
7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.



8 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



9 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



10 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$$

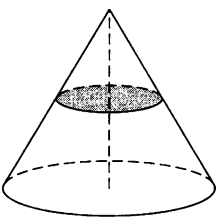
(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 50 м/с?

Задача 8

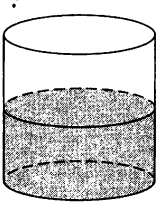
Подготовительные задания

1 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.

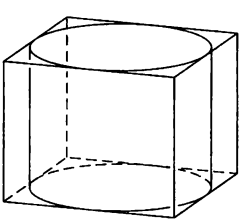
2 Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



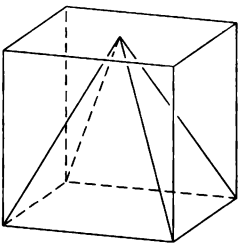
3 В цилиндрический сосуд налили 1800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.



4 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Высота параллелепипеда равна 3. Найдите длину образующей цилиндра.



5 Основание правильной четырехугольной пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина этой пирамиды лежит в центре противоположной грани. Найдите объем этой пирамиды, если объем куба равен 24.



6 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13, а одна из высот основания равна 7,5. Найдите высоту пирамиды.

7 Тангенс угла между плоскостью боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен 5. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

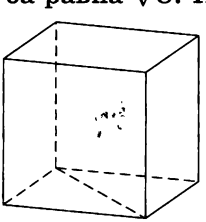
8 Высота основания правильной треугольной пирамиды в полтора раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

9 Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

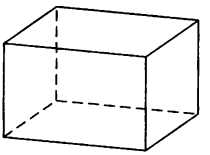
10 Высота боковой грани правильной четырехугольной пирамиды, проведенная к стороне основания, равна 10, а высота пирамиды равна 8. Найдите сторону основания пирамиды.

Зачетные задания

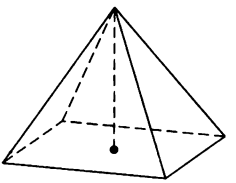
1 Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объем.



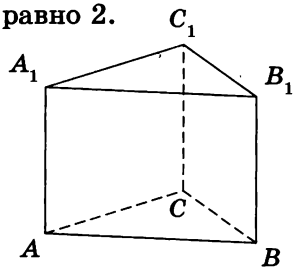
2 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



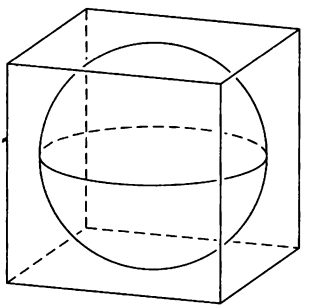
3 В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.



4 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



5 Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



6 Высота боковой грани правильной треугольной пирамиды, проведенная к ребру основания, равна 10, а высота основания пирамиды равна 18. Найдите высоту пирамиды.

7 Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, синус которого равен $0{,}2\sqrt{3}$, а сторона основания пирамиды равна 10. Найдите расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани.

8 Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 4, а синус угла между боковой гранью и основанием пирамиды равен 0,4. Найдите высоту основания пирамиды.

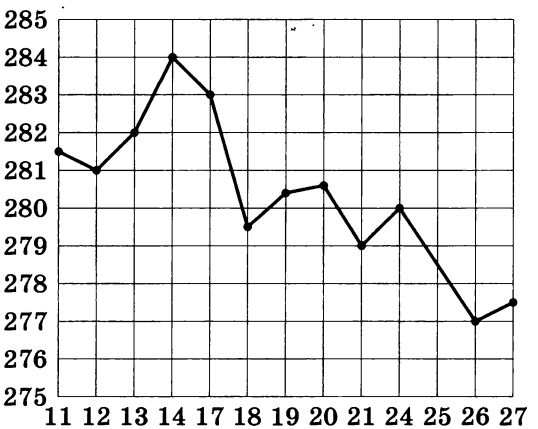
9 Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PAC.

10 Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P и стороной основания, равной $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра PA до плоскости BPD.

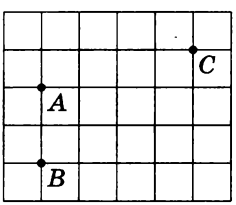
Диагностическая работа №5

1 Молодая семья состоит из двух человек: мужа и жены. Доход семьи складывается из их зарплат. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, доход семьи вырос бы на 108 %. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата жены?

2 На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена унции золота на момент закрытия торгов была наибольшей за указанный период.



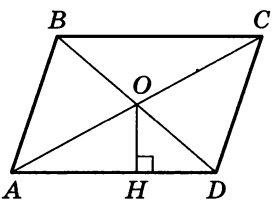
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.



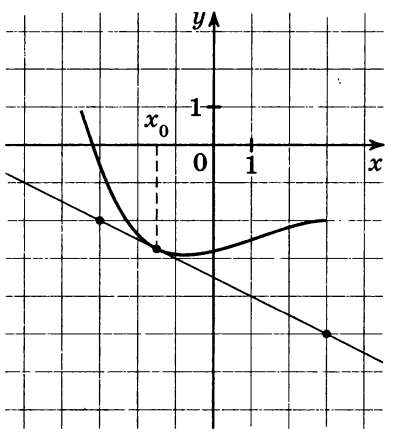
4 По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-6x}=7$.

6 Сторона параллелограмма равна 9 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь параллелограмма. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0.



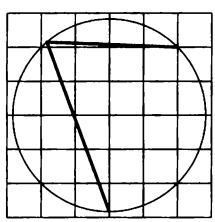
8 Кубик весит 10 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала?

Диагностическая работа №6

1 Шоколадка стоит 31 рубль. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первой половине сентября. 3 сентября бизнесмен купил пакет акций компании, а 11 сентября продал его. В результате этих операций убыток бизнесмена составил 23 400 рублей. Сколько акций было в пакете?

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.



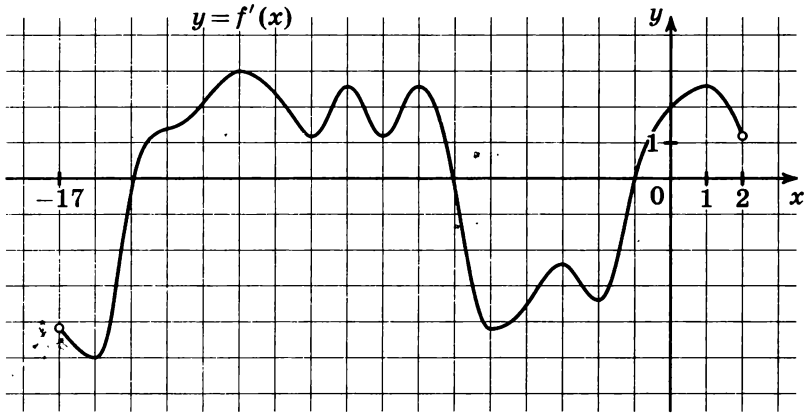
4 На фабрике керамической посуды 10 % произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того,

что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5 Решите уравнение $\log_{x-7} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6 Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угол BAC, если угол BOC равен $123°$. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-17; 2)$. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$.



8 Высота основания правильной треугольной пирамиды в полтора раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 9—12

Ответом к заданиям 9—12 части 2 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

Диагностическая работа №7

1 (*задача* 9) Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

2 (*задача* 10) Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили газ, содержащий в начальный момент времени $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого равен $T = 10$ мин. В течение скольких минут содержание изотопа азота-13 в газе будет не меньше 5 мг?

3 (*задача* 11) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B за 4 часа, а обратно — за 3 часа. Сколько часов будет плыть от B до A плот?

4 (*задача* 12) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.

Диагностическая работа №8

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $\dfrac{42^2-(0,42)^2}{42,42}$.

2 (*задача* 10) Для получения увеличенного изображения на экране в демонстрационной лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=40$ см. Экран может быть помещен на расстоянии от 200 до 240 см от линзы, а лампочка — на расстоянии от 30 до 60 см от нее. Зная, что расстояние от линзы до предмета d_1 и расстояние от линзы до изображения d_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}=\dfrac{1}{f}$, укажите, на каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким.

3 (*задача* 11) Первая труба пропускает на 12 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объемом 160 литров она заполняет на 12 минут позже, чем вторая труба?

4 (*задача* 12) Найдите наибольшее значение функции $y=x+\dfrac{9}{x}$ на отрезке $[-4;-1]$.

Задача 9

Подготовительные задания

1 Вычислите $\log_a a^5$.

2 Чему равно $\log_3 a + \log_3 b$?

1) $\log_3(a+b)$ 2) $\log_3(a\cdot b)$ 3) $\log_3 a^b$ 4) $\log_3(a\cdot 3^b)$

3 Вычислите $\log_2 16$.

4 Вычислите $\log_3 \frac{1}{27}$.

5 Вычислите $\log_{\frac{1}{5}} 25$.

6 Вычислите $\log_{10} 0{,}0001$.

7 Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

8 Вычислите $\log_{0,1} 0{,}001$.

9 Вычислите $\log_5 70 - \log_5 14$.

10 Вычислите $\log_8 288 - \log_8 4{,}5$.

Зачетные задания

1 Найдите значение выражения $4^{41} : 12^{40} \cdot 3^{42}$.

2 Найдите значение выражения $(5d-1)(5d+1) - (5d+1)^2$ при $d = 110$.

3 Найдите значение выражения $\left(5\frac{1}{3} - 3{,}5\right) : \frac{11}{12}$.

4 Найдите значение выражения $\frac{a^{-23}\cdot a^{-38}}{a^{-60}}$ при $a = 0{,}01$.

5 Найдите значение выражения $\frac{b^2 \cdot \sqrt[6]{b}}{\sqrt[10]{b}\cdot \sqrt[15]{b}}$ при $b = 6$.

6 Найдите значение выражения $\frac{44 \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ}{\sin 88^\circ}$.

7 Найдите $34 \sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

8 Найдите значение выражения $\left(9^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)^{\frac{3}{2\sqrt{5}}}$.

9 Вычислите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.

10 Найдите $\log_a \frac{a^3}{b^7}$, если $\log_b a = 7$.

Задача 10

Подготовительные задания

1 В социологическом опросе участвовало 540 случайно выбранных человек. Среди них были 293 женщины и 247 мужчин. Из всех опрошенных 83 человека оказались не старше 20 лет, 69 — в возрасте от 20 до 30 лет, 95 — в возрасте от 30 до 40 лет, 72 человека в возрасте от 40 до 50 лет, остальные опрошенные старше 50 лет. Сколько человек участвовало в социологическом опросе?

2 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 8 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

3 Начальная скорость V_0 движущегося с постоянным ускорением тела равна 15 м/с. Ускорение тела a равно 13 м/с^2. С какой скоростью (в м/с) будет двигаться тело в момент времени $t = 9$ с, если скорость движения тела при равноускоренном движении вычисляется по формуле $V = V_0 + a \cdot t$?

4 Расстояние от линзы до предмета d_1 и расстояние от линзы до изображения d_2 связаны соотношением $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$, где f — главное фокусное расстояние линзы. Найдите f, если известно, что при расстоянии от линзы до предмета, равном 70 см, расстояние от линзы до изображения этого предмета равно 30 см. Ответ дайте в сантиметрах.

5 Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

6 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя КПД этого двигателя будет не меньше 25 %, если температура холодильника $T_2 = 285$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

7 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. После дождя измеряемое время уменьшилось на 0,2 с. На сколько метров поднялся уровень воды?

8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 54$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 8$ км/ч^2. Расстояние S от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует связь на расстоянии не далее чем в 58 км от города. Ответ выразите в минутах.

9 Камень подбросили вверх. Его высота над землей (в метрах) вычисляется по формуле $h(t) = 23t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 12 метров?

10 Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое минимальное количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы расстояние от него до горизонта было больше 12 километров? Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h км над землей, до линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Зачетные задания

1 При температуре 0° рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2 Зависимость объема спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой

$$q = 70 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

3 Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 0,625 м? Ответ выразите в м/с.

4 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной на-

чальной скоростью. Траектория полета камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

5 [redacted]

на высоте не менее четырех метров?

6 Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{64} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $2{,}28 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

7 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 240 до 280 см. Изображение на экране будет четким,

если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

8 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 190$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (м/с) по закону

$$f(v)=\frac{f_0}{1-\frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

9 Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v=\sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в часах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 80$ мкг изотопа натрия-24, период полураспада которого $T = 15$ ч. В течение скольких часов масса изотопа натрия-24 будет не меньше 10 мкг?

Задача 11

Подготовительные задания

1 Труба наполняет бассейн за 6 часов. Сколько литров воды за час пропускает труба, если объем бассейна 900 литров?

2 На изготовление заказа у рабочего уходит 26 часов. Сколько деталей входит в заказ, если за час рабочий делает 30 деталей?

3 С какой средней скоростью нужно ехать гонщику, если он хочет проехать 450 километров за 2,5 часа? Ответ дайте в километрах в час.

4 Первая труба наполняет бассейн за 9 часов. За сколько часов заполнит бассейн вторая труба, если известно, что она пропускает в полтора раза больше воды, чем первая?

5 Первый рабочий делает за час на 5 деталей больше, чем второй. На сколько часов больше затратит второй рабочий на изготовление 800 деталей, если первый рабочий за час делает 25 деталей?

6 Брюки дороже рубашки на 30 %. Какую долю от стоимости брюк составляет стоимость рубашки?

7 Скорость товарного поезда равна 45 км/ч. Выразите скорость поезда в метрах в секунду.

8 Имеется 10 литров 60-процентного раствора соли. Сколько литров воды нужно долить, чтобы получить 40-процентный раствор соли?

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч, проходит по течению реки до пункта назначения и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 12 часов после отплытия из него. Ответ дайте в километрах.

10 Моторная лодка прошла путь от пункта А до пункта Б и обратно без остановок за 9 часов. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если скорость лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах.

Зачетные задания

1 Расстояние между городами A и B равно 580 км. Из города A в город B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Через сколько часов после выезда второго автомобиля автомобили встретятся?

2 Товарный поезд каждую минуту проезжает на 500 метров меньше, чем скорый, и на путь в 120 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

3 Два мотоцикла стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 20 км. Через сколько минут мотоциклы поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 12 км/ч больше скорости другого?

4 Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

5 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час — со скоростью 70 км/ч, а затем три часа — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

6 Маша и Настя вымоют окно за 12 минут. Настя и Лена вымоют это же окно за 20 минут, а Маша и Лена — за 15 минут. За сколько минут девочки вымоют окно, работая втроем?

7 Две трубы наполняют бассейн за 4 часа. Только одна первая труба наполняет бассейн за 5 часов. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

8 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на

4 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

9 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, второй — 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

10 Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Задача 12

Подготовительные задания

1 Найдите производную функции $h(x) = x^4 + 2x - 3$.

2 Найдите производную функции $h(x) = e^{2x} + 3$.

3 Найдите производную функции $h(x) = 5 \sin x$.

4 Найдите производную функции $h(x) = 7 \ln x$.

5 Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$, если $F(4) = 5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

6 Найдите точку максимума функции $h(x) = \sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

7 Найдите точку минимума функции $h(x) = x^2 - 13x + 29$.

8 Найдите наибольшее значение функции $h(x) = 6x - x^2 + 3$.

9 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3\cos x - \frac{48}{\pi}x + 19$$

на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$.

10 Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(x+5)^5$ на отрезке $[-4{,}5; 1]$.

Зачетные задания

1 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x+3)^2(x+5) - 1$$

на отрезке $[-4; -1]$.

2 Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{25 + x^2 - x^3}{x}$$

на отрезке $[1; 10]$.

3 Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$ на отрезке $[0; 6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

4 Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)\sqrt{x+2}$ на отрезке $[-1; 7]$.

5 Найдите точку минимума функции

$$y = x \sin x + \cos x - \frac{3}{4} \sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7 Один из двух нулей первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = 5x - 1$ равен -3. Найдите второй нуль.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = (3 - x^2)e^{x-1}$ на отрезке $[0; 2]$.

9 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 5x + 5$.

10 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{6}\right]$.

Диагностическая работа №9

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $6\log_7 \sqrt[3]{7}$.

2 (*задача* 10) Расстояние до линии горизонта от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h над землей, выраженной в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы расстояние от него до горизонта было больше восьми километров? Ответ дайте в метрах.

3 (*задача* 11) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, он через два года был продан за 15 842 рубля.

4 (*задача* 12) Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке $[1; 9]$.

Диагностическая работа №10

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $\left(2\frac{6}{7}-1\frac{1}{3}\right)\cdot 5\frac{1}{4}$.

2 (*задача* 10) По закону Ома для полной цепи сила тока равна $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$, где $\varepsilon=12$ В — ЭДС источника, $r=1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи. При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять менее 10 % силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}}=\frac{\varepsilon}{r}$? Ответ дайте в омах.

3 (*задача* 11) Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

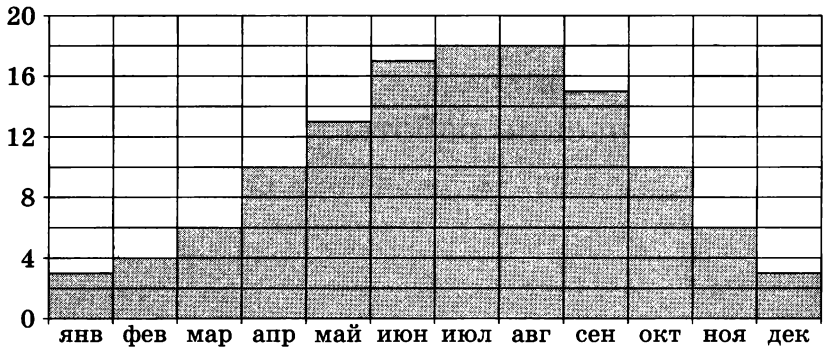
4 (*задача* 12) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+4x^2+4x$ на отрезке $[-3;\,-1]$.

Задания с кратким ответом (задачи 1—12). Диагностические работы

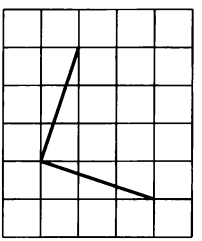
Диагностическая работа №11

1 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 40 копеек. Счетчик электроэнергии 1 марта показывал 770 киловатт-часов, а 1 апреля показывал 1135 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.

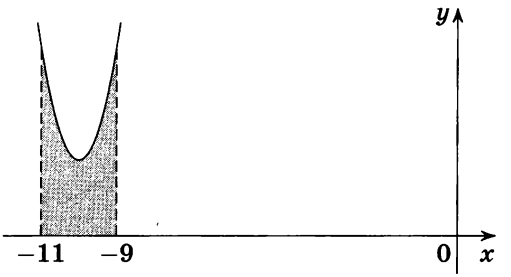


4 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по круглым червям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику попадется вопрос по круглым червям.

5 Решите уравнение $\sqrt{7-x}=4$.

6 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=8$.

7 На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8 Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см^2. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^2.

9 Вычислите $\log_5 135-\log_5 5{,}4$.

10 Высоту над землей подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t)=1{,}6+13t-5t^2$, где t — время с момента броска в секундах, h — высота в метрах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 6 метров?

11 Товарный поезд, идущий со скоростью 30 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Определите длину поезда (в метрах).

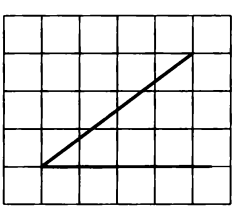
12 Найдите наибольшее значение функции $y=11x+\cos x+10$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Диагностическая работа №12

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 31 рублей 20 копеек за литр. Сдачи клиент получил 1 рубль 60 копеек. Сколько литров бензина было залито в бак?

2 Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее +6°C. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его косинус.



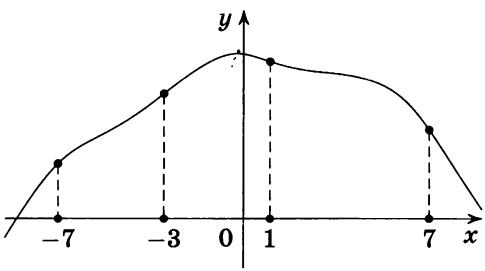
4 Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что

он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

5 Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

6 В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно $45°$ и $67°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины C. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 и образует с плоскостью основания угол, синус которого равен 0,8. Найдите высоту основания пирамиды.

9 Найдите значение выражения $\log_4 104 - \log_4 6{,}5$.

10 Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет не меньше 80 %, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

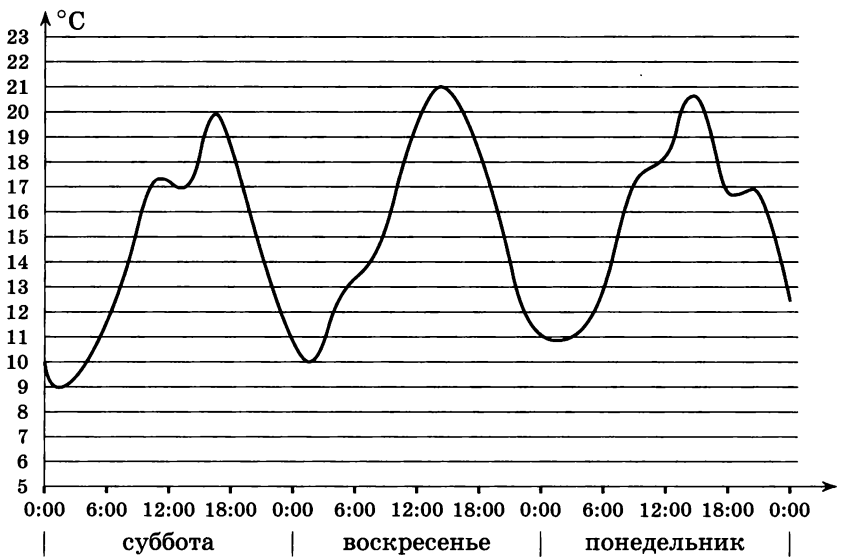
11 Брюки дороже рубашки на 30 % и дешевле пиджака на 22 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12 Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 4x + 2$, если множеством значений первообразной является луч $[-4; +\infty)$. В ответе укажите значение $F(-2)$.

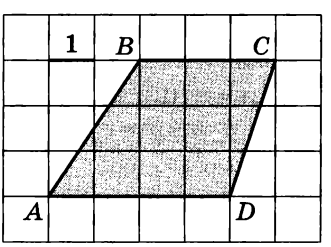
Диагностическая работа №13

1 Билет на автобус стоит 110 рублей. Ожидается повышение цены на 10 %. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей?

2 На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населенном пункте на протяжении трех суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



4 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стекол, вторая — 55 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая — 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

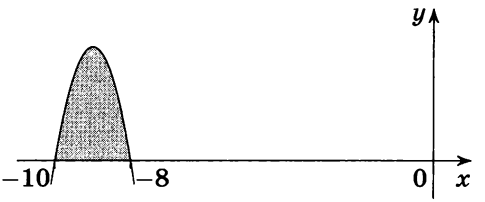
5 Решите уравнение $\log_2 x = 5$.

6 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AP = 5$, $BM = 6$, $CK = 7$.

7 На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

$$F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$$

— одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8 Площадь боковой поверхности конуса равна 10 см^2. Радиус основания конуса увеличили в 6 раз, а образующую уменьшили в 4 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса. Ответ дайте в см^2.

9 Вычислите $\log_6 144 - \log_6 4$.

10 Температуру нагревательного элемента (в градусах Кельвина) в зависимости от времени (в минутах) можно вычислять по формуле $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 760$ К, $a = 34$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

11 Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

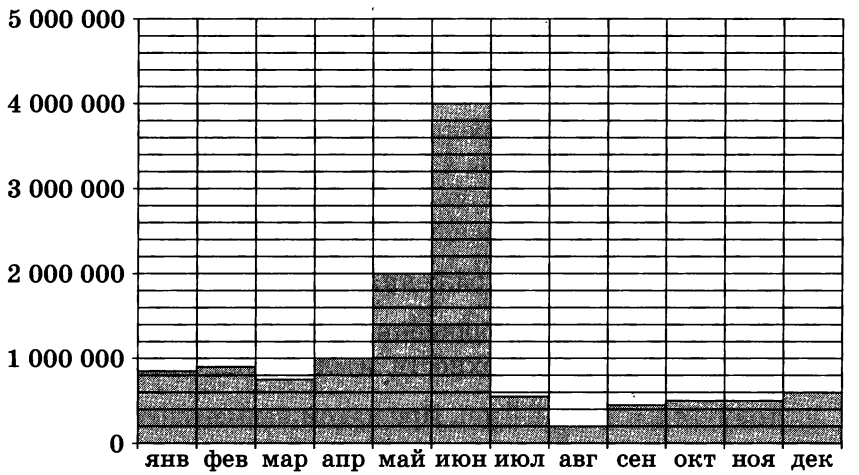
$$y = 13 - 7\sin x - 9x$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

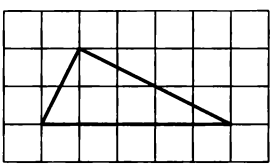
Диагностическая работа №14

1 Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 250 мг два раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке лекарства содержится 10 таблеток по 125 мг. Какое наименьшее количество упаковок понадобится на весь курс лечения?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов превышало минимальное месячное число запросов со словом ЕГЭ в 2009 году.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведенной к гипотенузе.

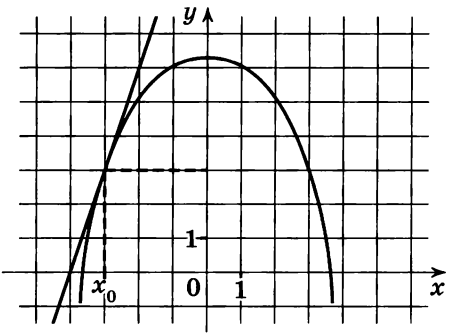


4 Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.

5 Решите уравнение $5^{x+5} = 0{,}04$.

6 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если $MB = 12$, $MC = 16$, $MD = 6$.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8 Тангенс угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен $\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{28}{2^{\log_2 7}}$.

10 Время полета мяча, брошенного под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли, можно посчитать по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ (с). При каком наименьшем значении угла (в градусах) время в полете будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

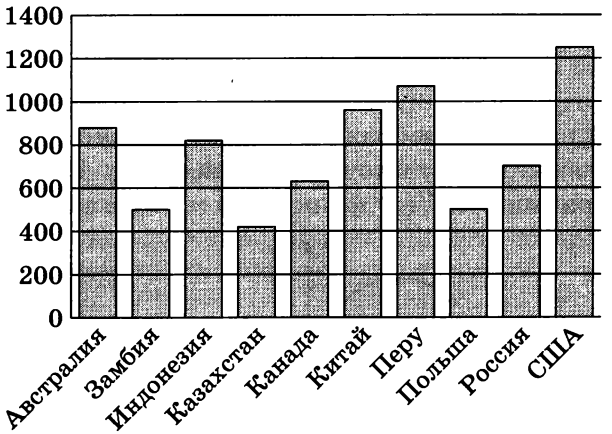
11 Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12 В какой точке отрезка $[0; 8]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 - 3x - 4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

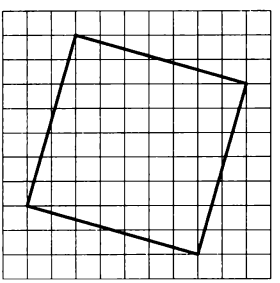
Диагностическая работа №15

1 Шкатулка и ее крышка имеют форму прямоугольного параллелепипеда. Длина, ширина и глубина шкатулки равны соответственно 20 см, 15 см и 10 см. Высота крышки равна 2 см. Для обивки изнутри шкатулки и ее крышки приобрели кусок атласа. Найдите (в квадратных сантиметрах) площадь этого куска, если он был куплен с запасом в 10 % от обиваемой площади.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Россия?



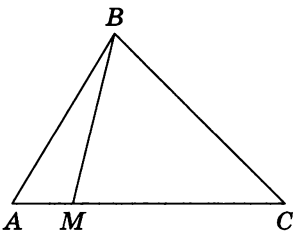
3 Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



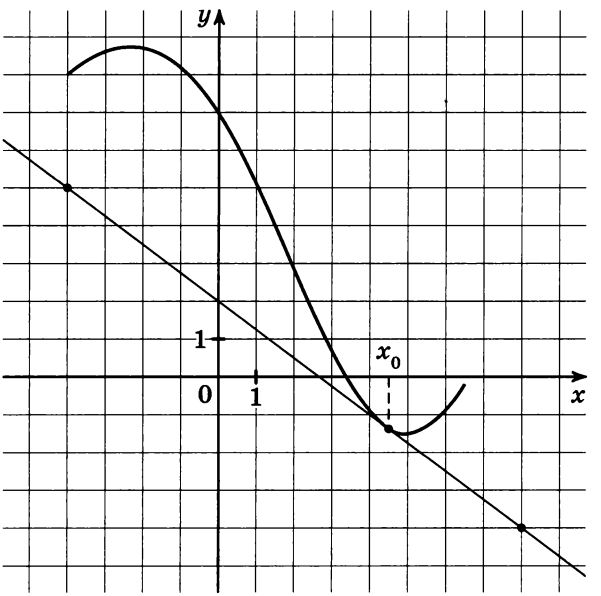
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 118 качественных сумок приходится семь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной.

5 Найдите корень уравнения $9 \cdot 2^x = 6^x$.

6 На стороне AC треугольника ABC взята точка M, причем $AM : MC = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABM равна 4 см^2. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0.



8 Объем конуса равен 6 см^3. Чему равен объем цилиндра, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный конус? Ответ дайте в см^3.

9 Найдите значение выражения $3^{-15} : 48^{-17} \cdot 16^{-16}$.

10 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре (в градусах Цельсия) между рельсами исчезнет зазор?

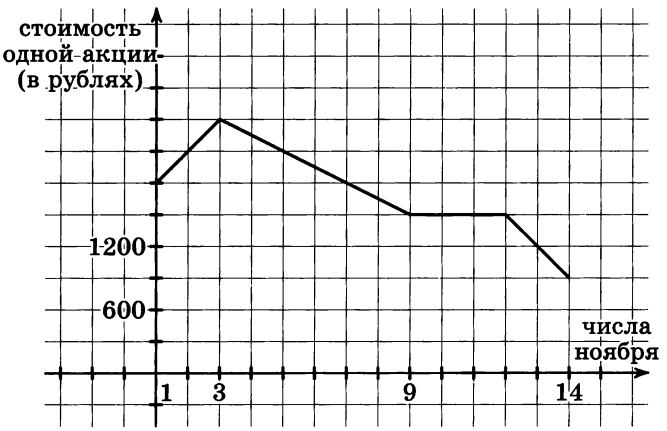
11 Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различных концентраций. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 - 6x + 36}{x}$ на отрезке $[3; 9]$.

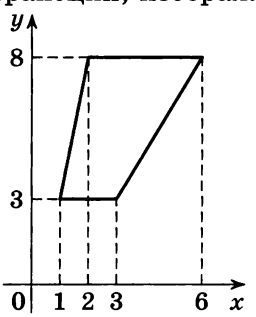
Диагностическая работа №16

1 В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учета расхода холодной воды (счетчик). 1 марта счетчик показывал расход 182 куб. м воды, а 1 апреля — 192 куб. м. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. Два друга — Сергей и Владимир — приобрели по 16 акций компании каждый: Сергей — 2 ноября, а Владимир — 3 ноября. Сергей продал свои акции 9 ноября, а Владимир продал свои 13 ноября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?



3 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



4 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70 % этих стекол, из которых 5 % имеют дефекты, вторая фабрика выпускает 30 % стекол, из которых 4 % имеют дефекты. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется с дефектами.

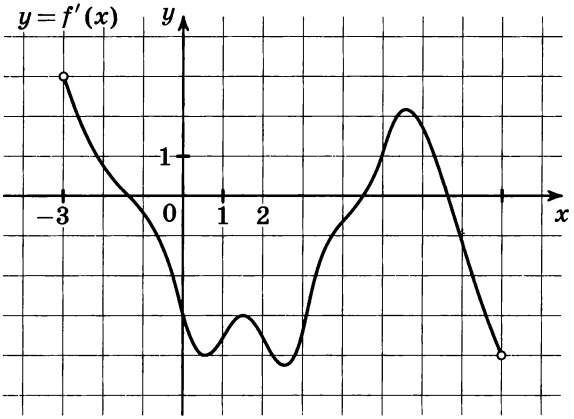
5 Решите уравнение

$$\sqrt{7-6x} = -x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6 Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $7:8$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, принадлежащих этим промежуткам.



8 Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P и стороной основания, равной $15\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра PA до плоскости BPD.

9 Найдите $34 \sin \alpha$, если $\cos \alpha = \dfrac{15}{17}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

10 Расстояние до линии горизонта от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землей, вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек стоит на пляже. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 24 см. На какое минимальное количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы расстояние от него до горизонта было не меньше восьми километров?

11 Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 24 км/ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера равна 25 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11$ на отрезке $[0; 6]$.

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 13—19

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №17

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

2 (*задача* 14) Точка P является серединой ребра BB_1 куба $A\ldots D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку D_1 параллельно прямой C_1P так, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
1) $\alpha \parallel AB_1$; 2) $\alpha \parallel AC$;
3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 8.
а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.
б) Найдите площадь этого сечения.

3 (*задача* 15) Решите неравенство

$$|2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leqslant 2.$$

4 (*задача* 16) Отрезок, соединяющий вершину A ромба $ABCD$ с серединой стороны BC, равен стороне ромба.
а) Докажите, что высота ромба, проведенная из вершины C, делит сторону AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.
б) Найдите диагональ AC ромба, если известно, что сторона ромба равна $\sqrt{6}$.

5 (*задача* 17) 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 51 000 рублей, во второй 66 600 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

6 (*задача* 18) Найдите значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2-4b+5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3. \end{cases}$$

7 (*задача* 19) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Диагностическая работа №18

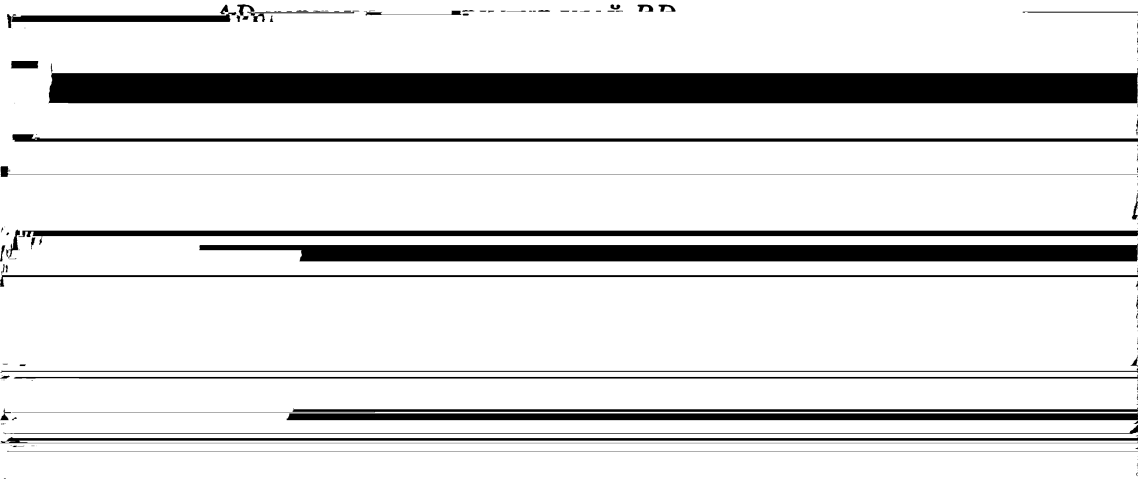
1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi;\ -2\pi]$.

2 (*задача* 14) Основание прямой четырехугольной призмы $A\ldots D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=5$, $AD=\sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 12.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD



б) Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD, пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите отношение $BM:AM$, если известно, что $AD=CD=2BC$ и $\angle ADC=60^\circ$.

5 (*задача* 17) Оля хочет взять в кредит 1 000 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

6 (*задача* 18) Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых имеет не менее пяти решений $(x;\ y)$ система уравнений

7 (*задача* 19) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то́ на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Задача 13

Подготовительные задания

1 а) Решите уравнение $7\cos^2 x - \cos x - 8 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2 а) Решите уравнение $8\sin^4 x + 10\sin^2 x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $\frac{4\cos x - 5}{2\cos x - 1} + \frac{1}{2\cos^2 x - \cos x} = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; \pi]$.

5 а) Решите уравнение $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{-\cos x} = 6^{\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $3\cos^2 x - 4\sin x + 4 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0{,}2)^{-\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $\log_3(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

10 а) Решите уравнение $2\cos 2x - 12\cos x + 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Зачетные задания

1 а) Решите уравнение $8\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

2 а) Решите уравнение $\log_3(\cos x + \sin 2x + 9) = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5 а) Решите уравнение $2\sin 2x + \sin x = 4\cos x + 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $\frac{7}{\sin^2 x} - \frac{10}{\sin x} + 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} + 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.

10 а) Решите уравнение $3\cos 2x + 5\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 14

Подготовительные задания

1 Прямые, содержащие ребра DA и BC треугольной пирамиды $DABC$, взаимно перпендикулярны, $DA = 10$, $BC = 24$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BD и параллельной прямым AD и BC.

б) Найдите расстояние между серединами ребер BD и AC.

2 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$ все ребра равны 10.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки E, B_1 и C_1.

б) Найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

3 В пирамиде $DABC$ известны длины ребер $AB = BC = DA = DC = 13$, $DB = 8$, $AC = 24$.

а) Постройте прямую, перпендикулярную прямым DB и AC.

б) Найдите расстояние между прямыми DB и AC.

4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2.

а) Постройте прямую, перпендикулярную AA_1 и BC_1.

б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен $60°$. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и PBC, проведенных к стороне BC, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP.

6 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

7 Точка K удалена от каждой их вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $6\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10.

а) Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из точки K на плоскость квадрата, совпадает с центром квадрата.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.

8 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра равны 2.

а) Докажите, что плоскость BB_1F перпендикулярна прямой B_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

9 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2.

а) Постройте прямую, перпендикулярную прямым SB и AE.

б) Найдите расстояние между прямыми SB и AE.

10 В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую AE и перпендикулярную плоскости ABC.

б) Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.

Зачетные задания

1 Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана ее основания равна 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

2 Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20.

а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная AC и проходящая через точку D, проходит через точку B.

б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

3 Высота правильной треугольной пирамиды равна 16, а медиана ее основания равна 8.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.
б) Найдите площадь этого сечения.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 12. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $PB_1 = 3PB$.
а) Докажите, что основания высот треугольников ACP и ACB_1, проведенных к стороне AC, совпадают.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACP и ACC_1.

6 Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.
а) Докажите, что сумма расстояний от этих хорд до оси цилиндра равна 14.
б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

7 В пирамиде $DABC$ известны длины ребер $AB = AC = DB = DC = 13$, $DA = 6$, $BC = 24$.
а) Постройте прямую, перпендикулярную прямым DA и BC.
б) Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

8 Точка K удалена от каждой их вершин квадрата $ABCD$ на расстояние, равное 10, а от плоскости квадрата — на расстояние, равное 8.
а) Докажите, что плоскость AKC перпендикулярна отрезку BD.
б) Найдите расстояние от точки D до плоскости AKC.

9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1.
а) Докажите, что основания высот треугольников A_1B_1C и $A_1B_1C_1$, проведенных к стороне A_1B_1, совпадают.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.

10 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2.
а) Постройте плоскость, проходящую через точку S и перпендикулярную ребру AF.
б) Найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.

Задача 15

Подготовительные задания

1 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 17\log_{17}(x+14) \geqslant x^2+8, \\ 17\log_{17}(x+14) \leqslant 6x-1. \end{cases}$$

2 Решите неравенство

$$\log_7(x^2-4x+5) > \log_7(2x-3).$$

3 Решите неравенство

$$\log_{0,8}(2x^2+13x+21) > 0.$$

4 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + \dfrac{16}{2^x} \geqslant 10, \\ \log_{x+2}(x-2) \leqslant 0. \end{cases}$$

5 Решите неравенство $\lg^2 x - 3\lg x - 4 \geqslant 0$.

6 Решите неравенство $\log_3^2 x - 2\log_3 x^2 + 3 < 0$.

7 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3\cdot 9^x - 28\cdot 3^x + 9 \leqslant 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

8 Решите неравенство $\dfrac{x-7}{\log_{x-6} 7} \geqslant 0$.

9 Решите неравенство $(x-9)\log_7(x-8) \leqslant 0$.

10 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geqslant 13, \\ 7 + \sqrt{13-x} \geqslant 7^{x-12}. \end{cases}$$

Зачетные задания

1 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4}\geqslant 2^x+4, \\ \log_2(x+1)\geqslant \dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+1)-1}. \end{cases}$$

2 Решите неравенство $\log_{2-x}3\leqslant\log_{2-x}x$.

3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}x+3}{6\log_x 2-1}\geqslant -2$.

4 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x-4\cdot 3^x+3\geqslant 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}}|x|\leqslant 0. \end{cases}$$

5 Решите неравенство $2^{\lg(x^2-1)}\geqslant(x+1)^{\lg 2}$.

6 Решите неравенство

$$\log_{0,2}(4x+9)+\log_5(9-x^2)+\sin(3{,}5\pi)<0.$$

7 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\log_2(x+5)\geqslant 0, \\ 8\cdot 4^x-33\cdot 2^x+4\geqslant 0. \end{cases}$$

8 Решите неравенство $\log_2(\log_3(\log_4 x))\leqslant 0$.

9 Решите неравенство $|x|^{x^2+3x-4}\leqslant 1$.

10 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot 81^x+3^x-87}{81^x-3}\geqslant 2, \\ \log_2^2(x+4)-5\log_2(x+4)+6\leqslant 0. \end{cases}$$

Задача 16

Подготовительные задания

1 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2 Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3 Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырехугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.

5 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

6 В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM : BQ$, если известно, что $AB : AC = 1:3$.

7 На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

8 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырехугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

9 Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра этой окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10 Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30°$, а точка D лежит на стороне BC, причем $DB : DC = 1 : 3$.

Зачетные задания

1 Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

2 В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырехугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

3 Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что ее основания равны 10 и 26.

4 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

5 Точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

6 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

7 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A.

8 Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причем $AM : MB = 2 : 1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

10 Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Задача 17

Подготовительные задания

1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 6 409 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

2 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 4 382 000 рублей в кредит под 16 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 16 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Андрей переводит в банк 587 250 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

4 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 50 000 рублей, во второй 66 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

5 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на

некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 57 000 рублей, во второй 61 600 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

7 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

9 Оля хочет взять в кредит 1 300 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 000 рублей?

10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет

1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

Зачетные задания

1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 052 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг четыремя равными платежами (то есть за 4 года)?

2 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 18 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 18 %), затем Андрей переводит в банк 4 107 580 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Андрей переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг четыремя равными платежами (то есть за 4 года)?

4 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша,

переведя в первый раз 59 000 рублей, во второй 56 100 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

5 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 53 000 рублей, во второй 67 800 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 4 026 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 4 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

7 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 777 600 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 1 317 600, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 148 175 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 055 375, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

9 Оля хочет взять в кредит 1 300 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, мо-

жет быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300 000 рублей?

10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 800 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 000 рублей?

Задача 18

Подготовительные задания

1 При каждом значении параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin x+3}{\cos y} = a, \\ \dfrac{\cos y}{2\sin x+3} = 2a-1. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+4x+a=3$ имеет более одного корня.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $8x^6+(a-x)^3+2x^2=x-a$ имеет хотя бы один корень.

4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-\sqrt{4-z})^2+(y-\sqrt{z})^2=1, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=9. \end{cases}$$

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3+\left(\dfrac{4}{x}\right)^3+16=2a^2$ имеет единственный корень.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+2\,|x-3|-3\,|x-a-4|=7\,|x-a|$ имеет хотя бы один корень.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+4=4(x+y), \\ (x-3)^2+(y-4)^2=a^2. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7x+3\,|x+a|-2|x-3|\geqslant 6$ выполняется для любого значения $x\in[0;\,7]$.

9 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число 9 является решением неравенства

$$(x-9)(x-16)\sqrt{a^2-8a\log_8(x-8)-9}\geqslant 0,$$

а число 16 не является решением этого неравенства.

10 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a+1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Зачетные задания

1 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2-4)^2 + y^2 + 8, \\ |y|\, z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+2)$ является и решением неравенства $49x^2 \leqslant 4a^4$.

4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a} = x - 2a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 1 > 0$ выполнено при любом значении x.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x+a-6)^2 + (y-a)^2 = 18, \\ \sqrt{x^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

2 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и
а) пять; б) четыре; в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

3 Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.
а) Может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

4 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел: -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел: -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 117?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

6 Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.
а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?
б) Докажите, что число ее членов меньше 100.
в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

7 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы

числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 1, 2, 3, 4, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

8 На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить семерками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

9 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять четверки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

10 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, — и кошка, и собака. Известно,

что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Диагностическая работа №19

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение

$$\frac{3\sin x-4}{\sin x-1}+\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}=1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$.

2 (*задача* 14) В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B_1, F_1 и D.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

3 (*задача* 15) Решите неравенство $\log_{0,25x^2}\left(\frac{x+6}{4}\right)\leqslant 1$.

4 (*задача* 16) Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите биссектрису BM треугольника ABK, если известно, что $AD=10$, $BC=2$, $AB=CD=5$.

5 (*задача* 17) 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 599 000 рублей в кредит под 14 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

6 (*задача* 18) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x;\,y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y,\\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x. \end{cases}$$

7 (*задача* 19) а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1595=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i целые, $0\leqslant a_i\leqslant 99$, $i=0;\,1;\,2;\,3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

Диагностическая работа №20

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2 (*задача* 14) В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра равны 1.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D, E и A_1.
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.

3 (*задача* 15) Решите неравенство $\log_{x^2}(x+1)^2 \leqslant 1$.

4 (*задача* 16) На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.
а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
б) Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

5 (*задача* 17) 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 200 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

6 (*задача* 18) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{|x-1|} + \sqrt{7\,|y|} = 1, \\ x^2 + 49y^2 + 4a + 1 = 2x \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

7 (*задача* 19) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например,

если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -13, -8, -6, -5, -1, 2, 7. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Тренировочные варианты ЕГЭ по математике

Ответом к заданиям с кратким ответом (1—12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

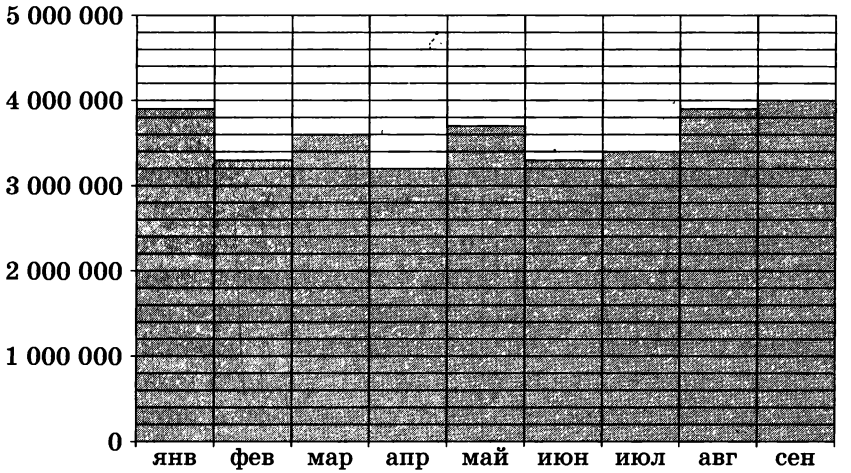
Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №21

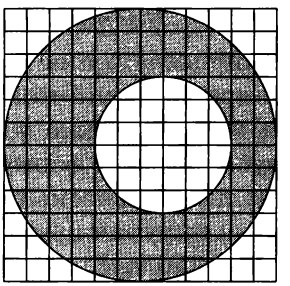
Часть 1

1 Школа закупает книги по цене 70 рублей за штуку. При покупке на сумму больше 500 рублей магазин дает скидку 10 %. Сколько рублей будет стоить покупка 23 книг?

2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

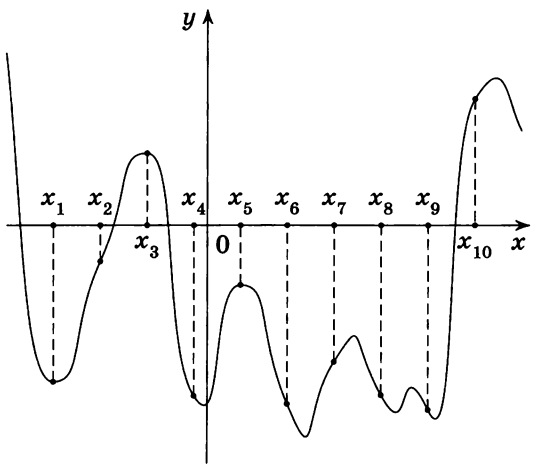


4 В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

5 Решите уравнение $\sqrt{x+4}=7$.

6 В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен $56°$. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8 Объем цилиндра равен 24 см^3. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объем получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q=100-10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r=q\cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

11 Первая труба наполняет бак объемом 600 литров, а вторая труба — бак объемом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-2)^2(x-4)+5 \quad \text{на отрезке } [1;\,3].$$

13 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Известны длины ребер пирамиды $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и DBC, проведенных к стороне BC, совпадают.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD.

15 Решите неравенство $\log^2_{|x|} x^2 + \log_2 x^2 \leqslant 6$.

16 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

17 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 9 009 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + |a^2 - 4a| = 0$ принимает наибольшее значение.

19 В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

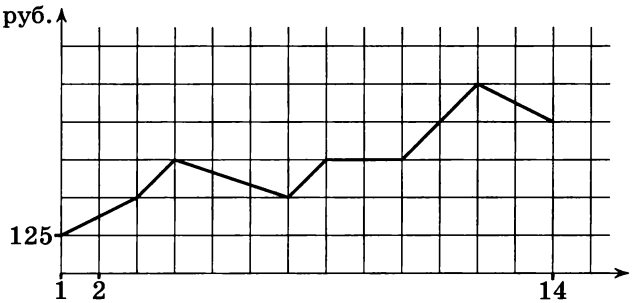
в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

Диагностическая работа №22

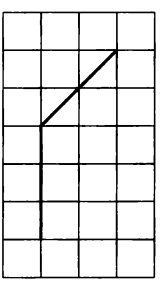
Часть 1

1 В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учета расхода холодной воды (счетчик). 1 сентября счетчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю апреля бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его градусную величину.

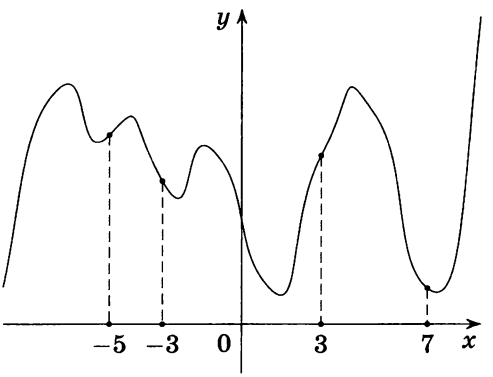


4 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

5 Решите уравнение $\log_{25}(2-3x)=0{,}5$.

6 Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



8 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $10\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 7. Найдите тангенс угла между боковым ребром и основанием пирамиды.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{60}{6^{\log_6 5}}$.

10 Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=2700$ кг — их общая масса, D (в метрах) — диаметр колонны. Считая ускорение свобод-

ного падения g равным 10 м/с^2, а π равным 3, определите наименьший возможный диаметр колонны (в метрах), если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па.

11 Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\operatorname{tg} x - 12x + 3\pi - 13 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $(25^{\sin x})^{\cos x} = 5^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 3 : 4, считая от вершины B.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x - 4} \leqslant 3$.

16 Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C, вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$, $CD = 8$.

17 Оля хочет взять в кредит 1 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное

количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 280 000 рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5\,|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

19 Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что ее второй член в 8 раз больше первого.

а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого ее члена в 567 раз?

б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом, и укажите любую пару таких ее членов.

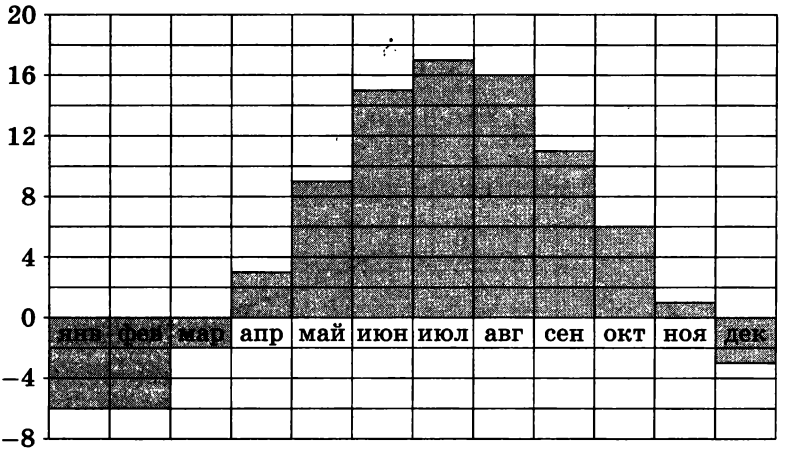
в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.

Диагностическая работа №23

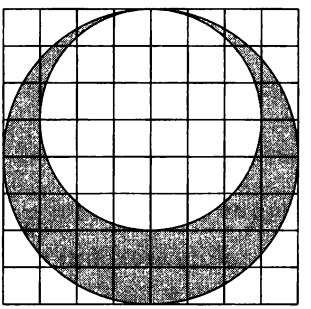
Часть 1

1 До снижения цен товар стоил 900 рублей, а после снижения цен стал стоить 828 рублей. На сколько процентов была снижена цена товара?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.



3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

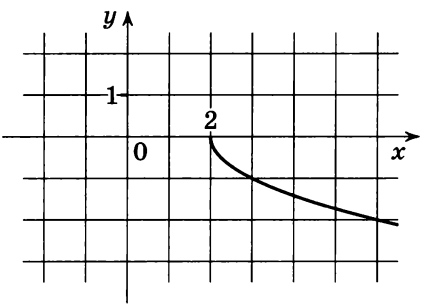


4 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

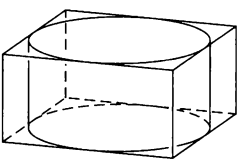
5 Решите уравнение $2^{5-x} = 0{,}25$.

6 Отрезок AB является хордой окружности с центром O. Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, если угол AOB равен $56°$. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1; 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



8 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 6. Найдите объем параллелепипеда.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{30}{5^{\log_5 3}}$.

10 Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1{,}4 + 14t - 5t^2$,

где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

11 Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

12 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6; 1]$.

13 а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3:5$, считая от вершины A.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, R и D_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\frac{x^2 - 12x + 10}{x - 1} + \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} \leqslant 2x - 11$.

16 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

17 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 60 000 рублей, во второй 55 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)=z, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0. \end{cases}$$

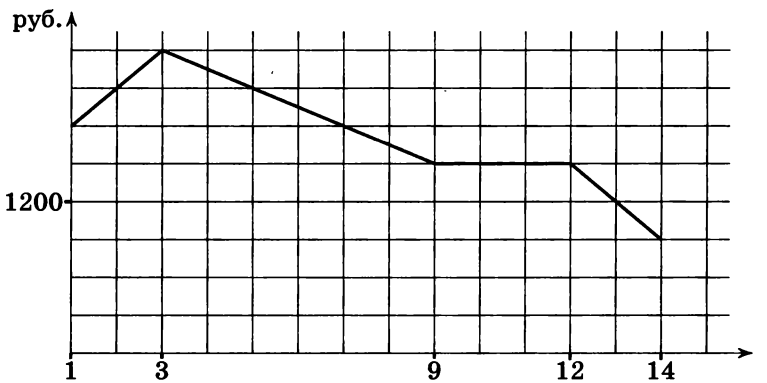
19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и
а) пять; б) четыре; в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Диагностическая работа №24

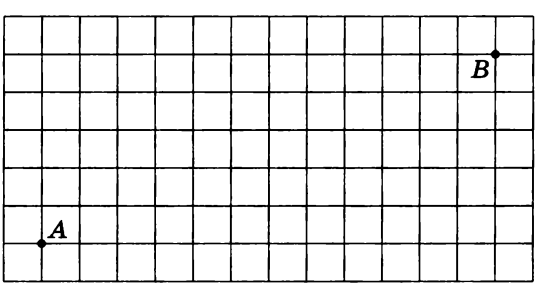
Часть 1

1 Для лакировки рекреации размером 10 метров на 10 метров понадобилось ровно 2 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки зала размером 15 метров на 30 метров?

2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



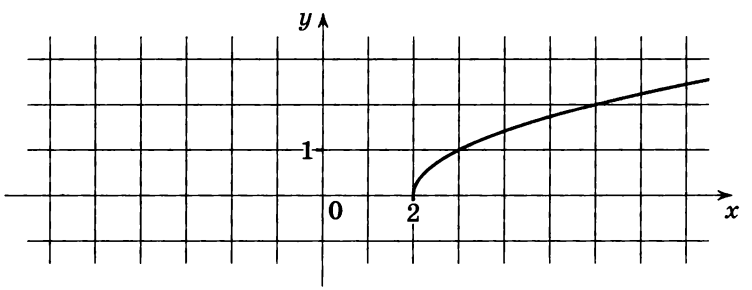
4 Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зеленые». Найдите вероятность того, что ровно в одном матче право первой владеть мячом получит команда «Белые».

5 Решите уравнение $\sqrt{x+9}=5$.

6 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M. Найдите MC, если

$$AB = 11, \quad DC = 33, \quad AC = 28.$$

7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6;-1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



8 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

10 Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0=280$ мкг изотопа железа-59, период полураспада которого $T=45$ суток. В течение скольких суток содержание изотопа железа-59 в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

11 Имеются два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

12 Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке $[19; 21]$.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковые ребра равны 8.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\log_{7-x}\dfrac{1-x}{x-7} \leqslant -1$.

16 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

17 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 671 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a-5)^2+(y-3a+5)^2=16, \\ (x-a-2)^2+(y-2a+1)^2=81. \end{cases}$$

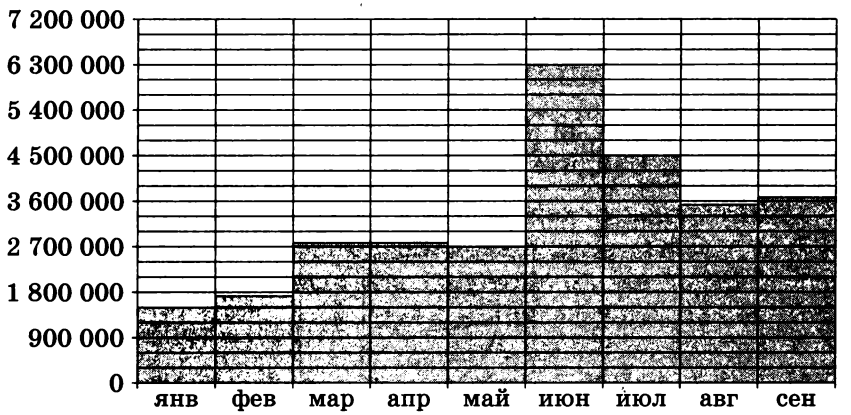
19 На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.
а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.
б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить четверками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.
в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

Диагностическая работа №25

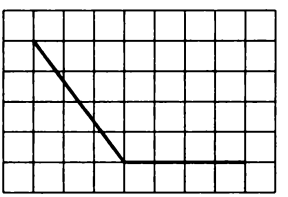
Часть 1

1 Хозяин овощной лавки купил на оптовом рынке 100 кг помидоров и заплатил 4000 рублей. После продажи помидоров оказалось, что за время хранения в лавке 10 % помидоров испортились, и хозяин не смог их продать. Остальные помидоры он продал по цене 70 рублей за килограмм. Какую прибыль он получил?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3 600 000.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите его синус.

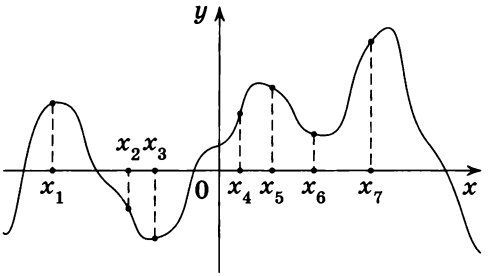


4 Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у нее выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

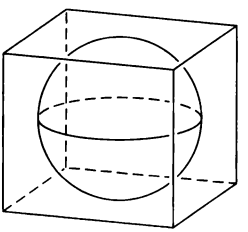
5 Решите уравнение $\log_2 x = -2$.

6 Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 140°.

7 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



8 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.

10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин,

$b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

11 Смешали 14 литров 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 10 литрами 18-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? Знак % в ответе не пишите.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x^2 - 9x + 9)e^{x-7} \quad \text{на отрезке } [6; 8].$$

13 а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 Точки N, M и P являются соответственно серединами ребер AA_1, AD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку A_1 так, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) $\alpha \perp NP$; 2) $\alpha \perp B_1M$;

3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 10.

а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 6} \leqslant 0$.

16 Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

17 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 2 788 425 рублей, то выплатит долг

за 4 года. Если по 4 991 625, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

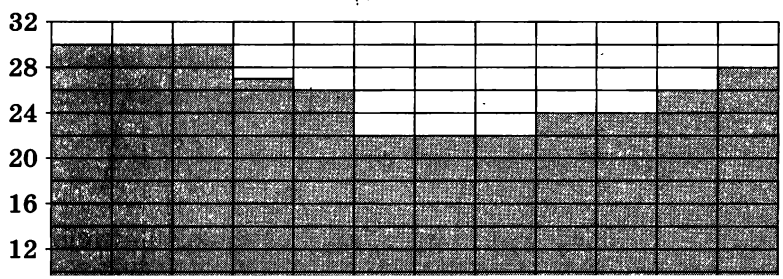
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Диагностическая работа №26

Часть 1

1 Из летнего лагеря уезжают 208 детей и 32 сопровождающих взрослых. В автобусах 44 посадочных места. Какое наименьшее количество автобусов нужно вызвать, чтобы отвезти всех домой?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

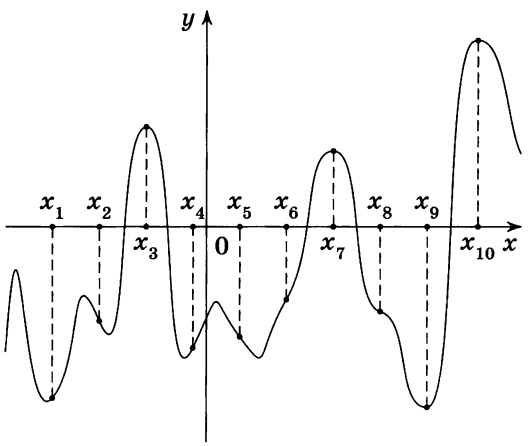


4 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = 6$.

6 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции?



8 Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 8. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(558^2 - 23^2) : 581$.

10 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 20°C$, через радиатор отопления пропускают горячую

воду температурой $T_в = 88°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°C)$, причем

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п} \text{ (м)},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °C}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot °C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы равна 64 м?

11 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 19 \quad \text{на отрезке } [8; 21].$$

13 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14 Точки M и P являются соответственно серединами ребер AA_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямой C_1P так, что из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:
1) $\alpha \parallel DC_1$; 2) $\alpha \parallel A_1C_1$;
3) площадь сечения куба плоскостью α больше 9.
а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.
б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\frac{x^2 + 6x + 7}{x + 2} + \frac{2 - 6x}{x} \leqslant x - 2$.

16 Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN, если известно, что $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

17 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 300 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

18 Найдите все пары значений параметров a, b, при каждой из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

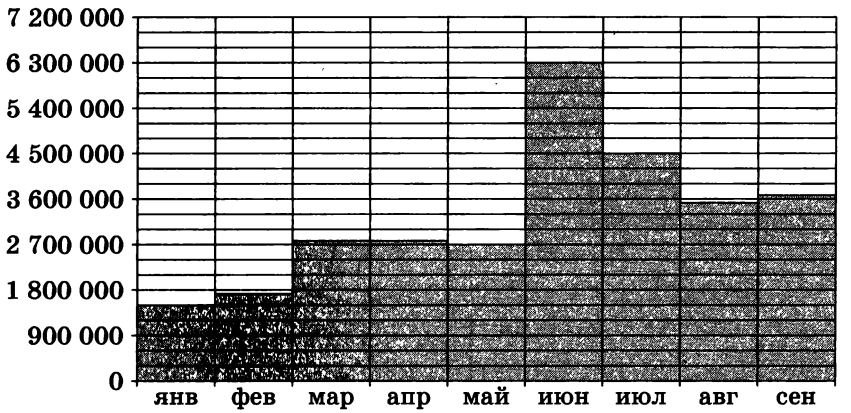
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Диагностическая работа №27

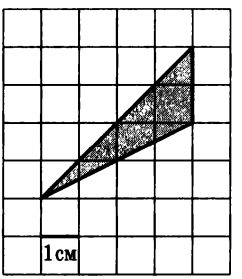
Часть 1

1 Цена на электрический чайник была повышена на 13 % и составила 2373 рубля. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наименьшее месячное число запросов со словом ФУТБОЛ в указанный период.



3 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

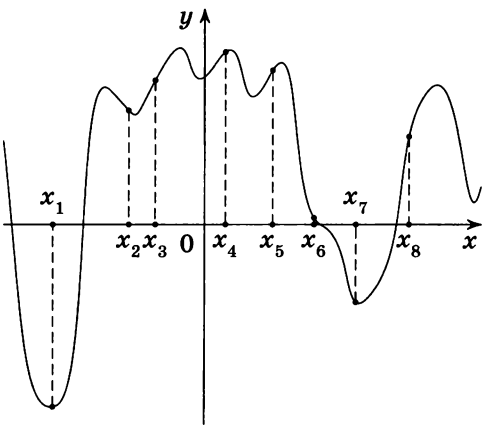


4 Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков сумма очков будет делиться на 4.

5 Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi(4x+7)}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

6 Вершина A выпуклого черырехугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B, C и D. Найдите угол BAD, если углы ABC и ADC равны соответственно 56° и 78°. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?



8 Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 15. Найдите площадь поверхности шара.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})^2}{7+\sqrt{48}}$.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада.

В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 80$ мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

11 Смешав 84-процентный и 96-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 84-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 89-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 84-процентного раствора использовали для получения смеси?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 3x + \ln x + 10 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $12\cos^2 x - 11\cos x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

14 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра равны 4.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B_1 и C_1.

б) Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

15 Решите неравенство $\log_{x+1}|x - 3{,}5| \geqslant 0$.

16 Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD.

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BD = 2$ и $\angle BCD = 45°$.

17 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Андрей переводит в банк 2 551 500 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - a(a^2+1)x + a^4 < 0$ имеет решение и множество решений неравенства содержится в интервале $(-3; 1)$.

19 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

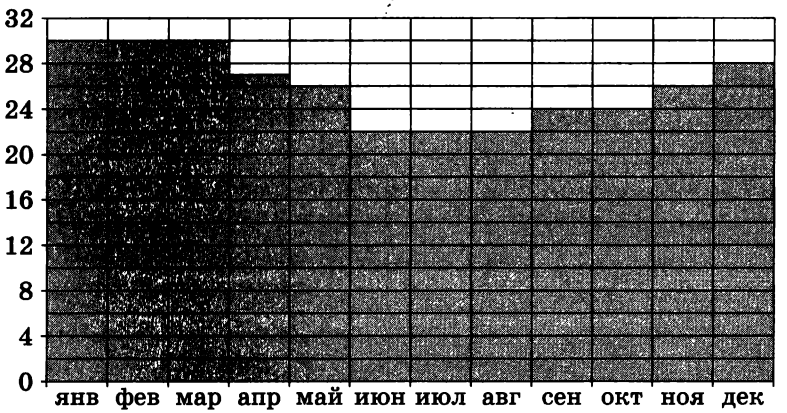
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Диагностическая работа №28

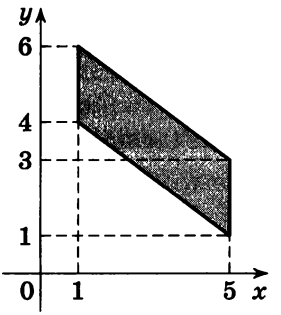
Часть 1

1 В доме, в котором живет Толя, один подъезд. На каждом этаже по девять квартир. Толя живет в квартире 98. На каком этаже живет Толя?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда среднемесячная температура превосходила 25°C.



3 Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются точки с координатами (1; 4), (1; 6), (5; 3), (5; 1).



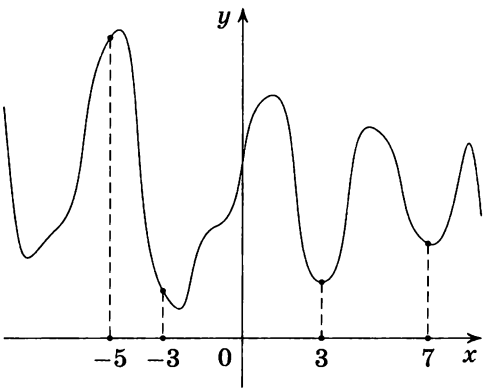
4 На турнир по шахматам прибыло 26 участников, в том числе близнецы Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбивают на две группы по 13 человек. Найдите вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

5 Найдите корень уравнения

$$\log_4(18-5x) = 2\log_4 3.$$

6 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите AC, если $CM=7$, $CN=8$, $BC=24$.

7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8 Высота правильной треугольной пирамиды равна 12, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна 13. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $3\cdot\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[12]{64}$.

10 Два тела массой $m=9$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q=mv^2\sin^2\alpha$.

Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 450 джоулей?

11 На изготовление 468 деталей первый рабочий затрачивает на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 520 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

12 Найдите наибольшее значение функции $3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке $[-4; -1]$.

13 а) Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\,x - 4\,\mathrm{tg}\,x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 24. Точка G принадлежит ребру MA, причем $MG : GA = 2 : 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, G и параллельной прямой AC.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство

$$2\log_2 \frac{x-1}{2x+3} + \log_2 (2x+3)^2 \geqslant 2.$$

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность с центром O_1, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что высота треугольника, проведенная из вершины A, равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении $9 : 8$, считая от вершины A.

17 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 6 951 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк

начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x - (a-1)\cdot 2^{x+1} + a^2 - 4a - 5 = 0$ имеет единственный корень.

19 По окружности расставлено 40 ненулевых целых чисел с общей суммой 16. Любые два стоящих рядом числа отличаются не более чем на 6, и никакие четыре отрицательных числа не стоят подряд.

а) Среди этих 40 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

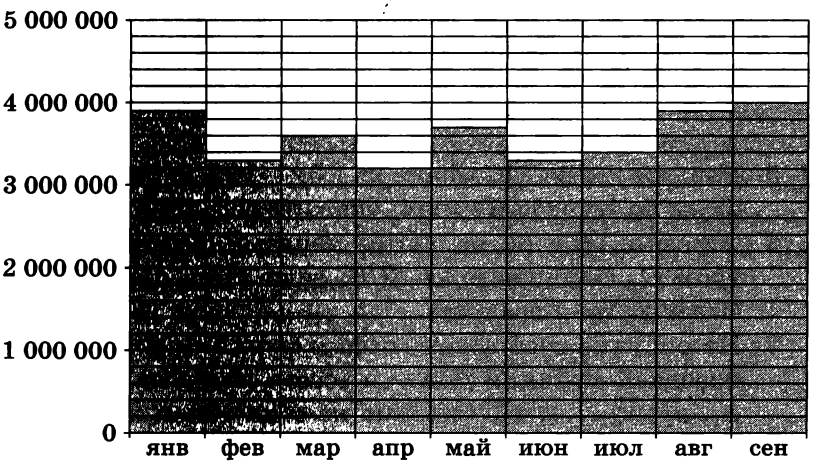
б) Среди этих 40 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Диагностическая работа №29

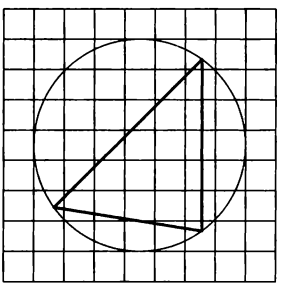
Часть 1

1 В сентябре 1 кг винограда стоил 100 рублей, в октябре виноград подорожал на 25 %, а в ноябре еще на 20 %. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

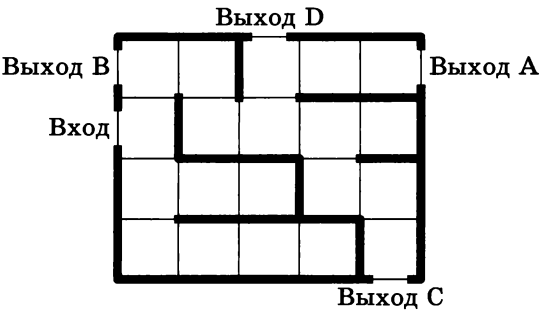
2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда месячное число запросов со словом КИНО не превосходило 3 500 000.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



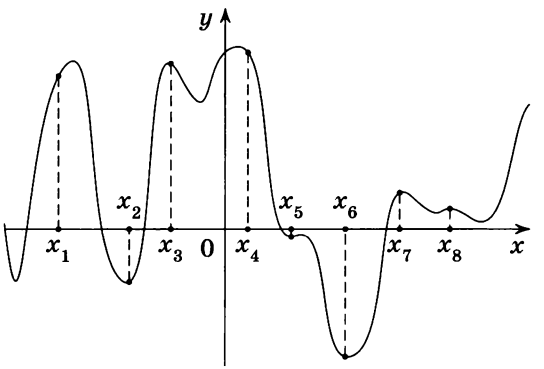
4 На рисунке изображен лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении выбирает один из путей, по которому еще не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придет к выходу D.



5 Найдите корень уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6 Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром O. Найдите угол ACB, если угол ABO равен 23°. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



8 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 7.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{18}-\sqrt{72}\sin^2\dfrac{5\pi}{8}$.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 64 километров? Ответ выразите в метрах.

11 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 567 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y=(21-x)e^{22-x} \quad \text{на отрезке } [16;\,25].$$

13 а) Решите уравнение $4\cos^2 x-12\cos x+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\,\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания равны $10\sqrt{3}$, а боковые ребра равны 8.

а) Постройте плоскость, проходящую через точку B_1 и перпендикулярную ребру A_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости BA_1C_1.

15 Решите неравенство

$$2\log_9(4x^2+1)\leqslant\log_3(3x^2+4x+1).$$

16 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что точки B, D, H и E лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $AC = 2$. Найдите угол между высотой CE и стороной BC.

17 Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 16, \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}. \end{cases}$$

19 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

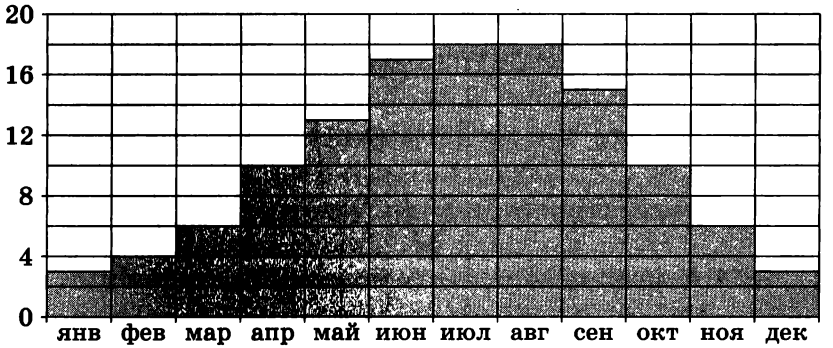
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Диагностическая работа №30

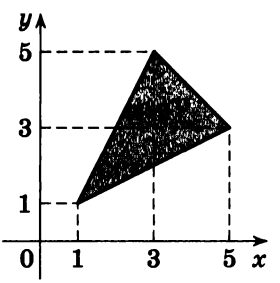
Часть 1

1 Подготовка книги к печати стоит 30 тысяч рублей. Печать одного экземпляра стоит 30 рублей. Сеть книжных магазинов покупает эту книгу у издательства по 70 рублей за экземпляр. При каком наименьшем тираже книги издательство окажется не в убытке?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки с координатами (1; 1), (3; 5), (5; 3).



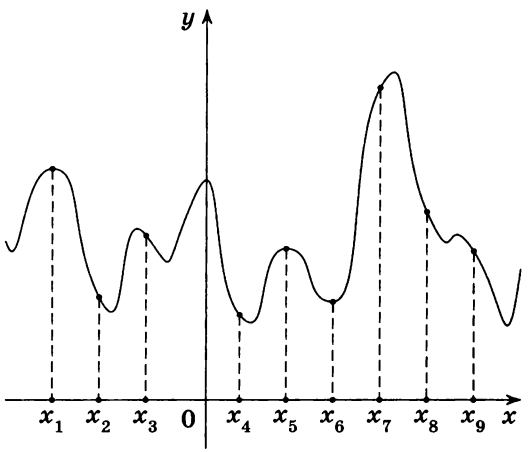
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

5 Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{10}{2x-8}} = \frac{1}{5}.$$

6 Сумма трех углов параллелограмма равна 197°. Найдите острый угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна?



8 Высота правильной треугольной пирамиды в три раза меньше высоты основания пирамиды. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 49}{\log_5 7}$.

10 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 65$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 20$ км/ч^2.

Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 35 км от города. Ответ выразите в минутах.

11 Игорь и Паша красят забор за 40 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 48 часов, а Володя и Игорь — за 60 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = -12 - 8{,}5\sqrt{3}\pi + 51\sqrt{3}x - 102\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

13 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 4$, $AD = 12$, $AA_1 = 3$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, D и C_1.

б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC_1.

15 Решите неравенство $\log_3 \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \leqslant 1$.

16 Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B, пересекает прямую AC в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM : MC$, если известно, что $AB : BC = 3 : 2$.

17 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной

Задача 4. Подготовительные задания

1. 0,5. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,14. **4.** 0,35. **5.** 0,2. **6.** 0,38. **7.** 0,33. **8.** 0,8836. **9.** $\frac{2}{3}$. **10.** 0,52.

Зачетные задания

1. 0,5. **2.** 0,5. **3.** 0,16. **4.** 0,9975. **5.** 0,35. **6.** 0,07. **7.** 2. **8.** 0,0296. **9.** 0,5. **10.** 0,48.

Задача 5. Подготовительные задания

1. 2. **2.** 49. **3.** 25. **4.** 0,09. **5.** 0,125. **6.** 4. **7.** 5. **8.** −4. **9.** −3. **10.** 39.

Зачетные задания

1. −0,5. **2.** −10. **3.** −8. **4.** −10. **5.** −4. **6.** 5. **7.** 1. **8.** −2. **9.** 8. **10.** 5.

Задача 6. Подготовительные задания

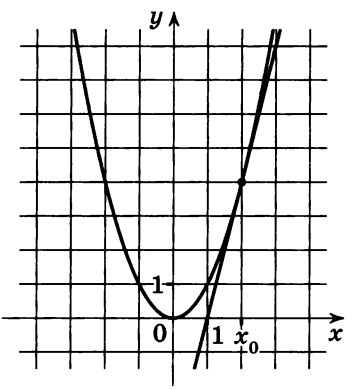
1. 33. **2.** 9,5. **3.** 18. **4.** 118. **5.** 26. **6.** 34. **7.** 1787. **8.** 168. **9.** 24. **10.** 11.

Зачетные задания

1. 73. **2.** 66. **3.** 11. **4.** 22. **5.** 67. **6.** 53. **7.** 134. **8.** 46. **9.** 28. **10.** 5.

Задача 7. Подготовительные задания

1. См. рисунок. **2.** 10. **3.** 5. **4.** −7. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 5. **10.** 6.



Зачетные задания

1. 7. **2.** −0,75. **3.** −3. **4.** 7. **5.** 5. **6.** −1. **7.** 4. **8.** 0. **9.** 7. **10.** 8.

Задача 8. Подготовительные задания

1. 8. **2.** 15. **3.** 300. **4.** 3. **5.** 8. **6.** 12. **7.** 2,5. **8.** 45. **9.** 8. **10.** 12.

Зачетные задания

1. 8. **2.** 5. **3.** 13. **4.** 2. **5.** 3. **6.** 8. **7.** 3. **8.** 10. **9.** 6. **10.** 2,5.

Диагностическая работа №5

1. 46. **2.** 14. **3.** 4. **4.** 0,02. **5.** −7. **6.** 54. **7.** −0,5. **8.** 270.

Диагностическая работа №6

1. 7. **2.** 39. **3.** 67,5. **4.** 0,98. **5.** 14. **6.** 57. **7.** 2. **8.** 45.

Диагностическая работа №7

1. −3. **2.** 30. **3.** 24. **4.** −54.

Диагностическая работа №8
1. 41,58. **2.** 48. **3.** 8. **4.** -6.

Задача 9. Подготовительные задания
1. 5. **2.** 2. **3.** 4. **4.** -3. **5.** -2. **6.** -4. **7.** -2. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 2.

Зачетные задания
1. 36. **2.** -1102. **3.** 2. **4.** 100. **5.** 36. **6.** 22. **7.** -16. **8.** 3. **9.** $-0{,}5$. **10.** 2.

Задача 10. Подготовительные задания
1. 540. **2.** 27,5. **3.** 132. **4.** 21. **5.** 10000. **6.** 380. **7.** 2,2. **8.** 60. **9.** 3,4. **10.** 48.

Зачетные задания
1. 25. **2.** 8. **3.** 2,5. **4.** 50. **5.** 2. **6.** 4000. **7.** 40. **8.** 15. **9.** 6250. **10.** 45.

Задача 11. Подготовительные задания
1. 150. **2.** 780. **3.** 180. **4.** 6. **5.** 8. **6.** $\frac{10}{13}$. **7.** 12,5. **8.** 5. **9.** 144. **10.** 80.

Зачетные задания
1. 3. **2.** 30. **3.** 50. **4.** 16. **5.** 75. **6.** 10. **7.** 20. **8.** 20. **9.** 100. **10.** 18.

Задача 12. Подготовительные задания
1. $h'(x) = 4x^3 + 2$. **2.** $h'(x) = 2e^{2x}$. **3.** $h'(x) = 5\cos x$. **4.** $h'(x) = \frac{7}{x}$. **5.** $-0{,}7$. **6.** $\frac{\pi}{2}$. **7.** 6,5. **8.** 12. **9.** 22. **10.** -20.

Зачетные задания
1. -1. **2.** 10. **3.** 18. **4.** 16. **5.** 0,75. **6.** 8. **7.** 3,4. **8.** 2. **9.** $-4{,}8$. **10.** 10.

Диагностическая работа №9
1. 2. **2.** 5. **3.** 11. **4.** -3.

Диагностическая работа №10
1. 8. **2.** 9. **3.** 60. **4.** 0.

Диагностическая работа №11
1. 511. **2.** 2. **3.** 90. **4.** 0,48. **5.** -9. **6.** 44. **7.** 6. **8.** 5. **9.** 2. **10.** 1,8. **11.** 300. **12.** 11.

Диагностическая работа №12
1. 32. **2.** 11. **3.** 0,8. **4.** 0,08. **5.** 6. **6.** 11. **7.** 7. **8.** 9. **9.** 2. **10.** 1000. **11.** 40. **12.** 0,5.

Диагностическая работа №13
1. 8. **2.** 10. **3.** 10,5. **4.** 0,019. **5.** 32. **6.** 36. **7.** 4. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 75. **12.** 13.

Диагностическая работа №14
1. 3. **2.** 20. **3.** 2,5. **4.** 0,25. **5.** -7. **6.** 8. **7.** 3. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 30. **11.** 72. **12.** 4.

Диагностическая работа №15
1. 1584. **2.** 6. **3.** 53. **4.** 0,944. **5.** 2. **6.** 18. **7.** $-0{,}75$. **8.** 18. **9.** 8. **10.** 50. **11.** 18. **12.** 6.

Диагностическая работа №16
1. 231. **2.** 9600. **3.** 15. **4.** 0,047. **5.** -7. **6.** 168. **7.** 9. **8.** 7,5. **9.** -16. **10.** 21. **11.** 5. **12.** -29.

Диагностическая работа №17
1. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi-\arcsin\frac{2}{3}$, $\pi+\arcsin\frac{2}{3}$. **2.** 6. **3.** -1; 2,5; 3,5. **4.** 3. **5.** 11. **6.** $a=-3$; $a=1$. **7.** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Диагностическая работа №18
1. а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π. **2.** 0,5. **3.** (2; 3]. **4.** 1 : 2. **5.** 6. **6.** $a=-4$, b любое; $a=4$, $b=2$. **7.** а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Задача 13. Подготовительные задания
1. а) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π. **2.** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$. **3.** а) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\arccos\frac{1}{3}-4\pi$. **4.** а) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -2π; 0. **5.** а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π. **6.** а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; -3π; $-\frac{8\pi}{3}$; -2π. **7.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.

8. а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$. **9.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **10.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Зачетные задания

1. а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ (-1)^m \arcsin\frac{3}{4}+\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\arcsin\frac{3}{4}$, $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$. **2.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$. **3.** а) $x=-\frac{3}{2}$; $x=4$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3}{2}; \frac{2\pi}{3}$. **4.** а) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi-\arcsin\frac{1}{3}$. **5.** а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; $2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **6.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$. **7.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. **8.** а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $3\frac{1}{6}\pi; \frac{7\pi}{2}$. **9.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$. **10.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.

Задача 14. Подготовительные задания

1. 13. **2.** 20. **3.** 3. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 1,5. **6.** $\operatorname{arctg}\sqrt{10}$. **7.** 8. **8.** $\sqrt{3}$. **9.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Зачетные задания

1. 5. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 6. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задача 15. Подготовительные задания

1. 3. **2.** $(1{,}5; 2)\cup(4; \infty)$. **3.** $(-4; -3{,}5)\cup(-3; -2{,}5)$. **4.** 3. **5.** $(0; 0{,}1]\cup$ $\cup[10000; \infty)$. **6.** $(3; 27)$. **7.** $(-1; 0)\cup(0; 0{,}5]\cup(1; 2]$. **8.** $(6; 7)\cup(7; \infty)$. **9.** 9. **10.** $(7; 13]$.

Зачетные задания

1. 0; 3. **2.** $(1; 2)$. **3.** $\left[\frac{1}{8}; 1\right)\cup(1; 16]\cup(64; \infty)$. **4.** $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)\cup\{1\}$. **5.** $[2; \infty)$. **6.** $(-2; 3)$. **7.** $\{-3\}\cup[2; \infty)$. **8.** $(4; 64]$. **9.** $[-4; -1]\cup\{1\}$. **10.** $[0; 0{,}25)\cup\{4\}$.

Задача 16. Подготовительные задания
1. 60°, 60°, 120°, 120°. **2.** 48. **3.** 50. **4.** 20. **5.** $3\sqrt{5}$. **6.** 1 : 1. **7.** 9 : 16. **8.** 90°. **9.** $3\sqrt{13}$. **10.** 90°.

Зачетные задания
1. 30. **2.** 5. **3.** 216. **4.** 60°. **5.** 3,5. **6.** 49. **7.** 2,4. **8.** $2\sqrt{5}$. **9.** 113. **10.** $2\sqrt{41}$.

Задача 17. Подготовительные задания
1. 3 817 125. **2.** 1 951 120. **3.** 986 000. **4.** 10. **5.** 12. **6.** 576 000. **7.** 506 250. **8.** 10. **9.** 5. **10.** 10.

Зачетные задания
1. 3 110 400. **2.** 8 931 000. **3.** 9 282 000. **4.** 10. **5.** 13. **6.** 950 400. **7.** 20. **8.** 12,5. **9.** 6. **10.** 5.

Задача 18. Подготовительные задания
1. $a=1$: $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; при прочих a решений нет. **2.** $a\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 4)$. **3.** $a\in\left(-\infty;\ \frac{1}{8}\right]$. **4.** $[1-\sqrt{7};\ 3\sqrt{2}]$. **5.** $a=0$; $a=\pm 4$. **6.** $a\in(-\infty;\ -6]\cup[6;\ +\infty)$. **7.** $\pm(\sqrt{5}-2)$; $\pm(\sqrt{5}+2)$. **8.** $a\in(-\infty;\ -4]\cup\cup[4;\ +\infty)$. **9.** $a\in[3;\ 9)$. **10.** $a\in[-4;\ -2]$: $x=\pm\arccos(a+3)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при прочих a корней нет.

Зачетные задания
1. $a=-2$. **2.** $a\in[-2;\ -0{,}5]$. **3.** $a\in(-\infty;\ -\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7};\ +\infty)$. **4.** $a>0$: $x=2a+1+\sqrt{3a+1}$; $a\in\left[-\frac{1}{3};\ 0\right]$: $x=2a+1\pm\sqrt{3a+1}$; при прочих a корней нет. **5.** a — любое иррациональное число. **6.** $a\in[1;\ +\infty)$. **7.** $a=3$. **8.** $a=0$; $a=2\sin 1$. **9.** $x=1$. **10.** $b\in(-4;\ -1)$.

Задача 19. Подготовительные задания
1. Только на 7. **2.** $n=11$. **3.** 40 500 000 001. **4.** Неверно. **5.** $x=y=z=2$. **6.** Например, $a=2$, $b=20$. **7.** $x=\left[\frac{10}{7}\right]=1$, $y=\left[\frac{1}{\frac{10}{7}-1}\right]=2$, $z=3$. **8.** Нельзя. **9.** $n=1806$. **10.** 8910.

Зачетные задания
1. а) 3; б) 72. **2.** а) нет; б) нет; в) да. **3.** а) да; б) нет. **4.** а) нет; б) да; в) 477. **5.** а) нет; б) нет; в) 4. **6.** а) да; г) например, 1, 126, ..., 8876. **7.** а) -3, 2, 4; б) 5; в) нет. **8.** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. **9.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{11}{3}$; в) $\frac{41}{11}$. **10.** а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Диагностическая работа №19

1. а) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** $(-6;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $[3;+\infty)$. **4.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **5.** 3 703 860. **6.** $a=-2$. **7.** а) 160; б) да; в) 20.

Диагностическая работа №20

1. а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{13\pi}{6}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $(-\infty;-1)$, $\left[-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$. **4.** 9. **5.** 3. **6.** $a=-\frac{1}{4}$; $a=-\frac{1}{32}$. **7.** а) -8, -5, 7; б) 7; в) нет.

Диагностическая работа №21

1. 1449. **2.** 4 000 000. **3.** 3. **4.** 0,1. **5.** 45. **6.** 34. **7.** 4. **8.** 30. **9.** 2. **10.** 7. **11.** 9. **12.** 5. **13.** а) $-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi-\operatorname{arctg}2$, $-\pi-\operatorname{arctg}3$. **14.** 2. **15.** $[-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2]$. **16.** 26. **17.** 1 036 800. **18.** $a=2$. **19.** а) нет; б) нет; в) 38.

Диагностическая работа №22

1. 211,2. **2.** 7000. **3.** 135. **4.** 0,52. **5.** -1. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 0,7. **9.** 12. **10.** 0,3. **11.** 10. **12.** -1. **13.** а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{23\pi}{6}$; 4π. **14.** $\sqrt{481}$. **15.** $(-\infty;-3]$, 0, $[1;4)$. **16.** 49. **17.** 6. **18.** $a=\frac{4}{3}$. **19.** а) нет; б) 8, a_2 и a_{10}; в) 8190 или 105.

Диагностическая работа №23

1. 8. **2.** 4. **3.** 7. **4.** 0,2. **5.** 7. **6.** 28. **7.** $-0{,}5$. **8.** 864. **9.** 10. **10.** 1,6. **11.** 120. **12.** 48. **13.** а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) 0, $\pm\arccos\frac{1}{7}$. **14.** $7\sqrt{19}$. **15.** $(-\infty;0]$, $(1;5)$. **16.** 1 и 4. **17.** 10. **18.** $a=1$. **19.** а) нет; б) нет; в) да.

Диагностическая работа №24

1. 5. **2.** 4500. **3.** 13. **4.** 0,375. **5.** 16. **6.** 21. **7.** 0,25. **8.** 45. **9.** 2. **10.** 180. **11.** 15,4. **12.** 1. **13.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$. **14.** $9\sqrt{91}$. **15.** $(1;2]$, $(6;7)$. **16.** 2. **17.** 259 200. **18.** -8; 0; 1; 9. **19.** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+1)$.

Диагностическая работа №25
1. 2300. **2.** 6. **3.** 0,8. **4.** 0,5. **5.** 0,25. **6.** 9. **7.** 5. **8.** 512. **9.** -2. **10.** 25. **11.** 25. **12.** -5. **13.** а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}$, $-2\pi + \arccos \frac{2}{5}$. **14.** $4\sqrt{6}$. **15.** $(-\infty; -4]$, $\left[\frac{7}{2}; 6\right)$. **16.** $\frac{55}{7}$. **17.** 12,5. **18.** $a = 4$. **19.** а) нет; б) нет; в) 4.

Диагностическая работа №26
1. 6. **2.** 8. **3.** 20. **4.** 0,027. **5.** 1,5. **6.** 120. **7.** 3. **8.** 3. **9.** 535. **10.** 37. **11.** 30. **12.** 28. **13.** а) $2\pi n$, $\pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}$, -2π, $-2\pi + \arccos \frac{1}{6}$. **14.** $8\sqrt{6}$. **15.** $(-\infty; -4]$, $(-2; 0)$. **16.** 4,5. **17.** 4. **18.** $a = b = -2$. **19.** а) нет; б) да; в) 549.

Диагностическая работа №27
1. 2100. **2.** 1 500 000. **3.** 4. **4.** 0,25. **5.** 1,5. **6.** 92. **7.** 2. **8.** 10. **9.** 2. **10.** 8. **11.** 20. **12.** 8. **13.** а) $\pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $\pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi + \arccos \frac{1}{4}$, $-2\pi + \arccos \frac{2}{3}$. **14.** $2\sqrt{7}$. **15.** $(0; 2{,}5]$; $[4{,}5; +\infty)$. **16.** 4. **17.** 6 076 000. **18.** $a \in [-\sqrt[3]{3}; -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1)$. **19.** а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Диагностическая работа №28
1. 11. **2.** 7. **3.** 8. **4.** 0,52. **5.** 1,8. **6.** 21. **7.** -3. **8.** 2,4. **9.** 12. **10.** 90. **11.** 26. **12.** 10. **13.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} \frac{7}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} \frac{7}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$. **14.** 96. **15.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$; $[3; +\infty)$. **16.** 40. **17.** 375 100. **18.** $a \in (-1; 5]$. **19.** а) 37; б) 10.

Диагностическая работа №29
1. 150. **2.** 4. **3.** 3,5. **4.** 0,0625. **5.** 2. **6.** 67. **7.** 5. **8.** 14. **9.** -3. **10.** 320. **11.** 24. **12.** -1. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$. **14.** $\frac{120}{17}$. **15.** $[0; 4]$. **16.** 30°. **17.** 5. **18.** $a = \pm 4\sqrt{3}$. **19.** а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Диагностическая работа №30
1. 750. **2.** 18. **3.** 6. **4.** 0,25. **5.** 129. **6.** 17. **7.** 5. **8.** 45. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 32. **12.** -63. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi m$, n,

$m \in \mathbb{Z}$; б) $-\arccos\frac{1}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \arccos\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{60}{13}$. **15.** $\left(-\frac{5}{2}; -2\right]$, $(1; 2]$. **16.** 9 : 4. **17.** 20. **18.** $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$. **19.** а) 10; б) 20; в) $\frac{7}{90}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЕГЭ-2016 по математике и как к нему готовиться 3

Диагностические работы за курс 10 класса 36
Диагностическая работа №1 37
Диагностическая работа №2 41

Подготовка к части 1 ЕГЭ по математике. Задачи 1—8 45
Диагностическая работа №3 46
Диагностическая работа №4 48
Задача 1 50
Задача 2 52
Задача 3 57
Задача 4 62
Задача 5 65
Задача 6 66
Задача 7 68
Задача 8 78
Диагностическая работа №5 82
Диагностическая работа №6 85

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 9—12 87
Диагностическая работа №7 88
Диагностическая работа №8 89
Задача 9 90
Задача 10 91
Задача 11 96
Задача 12 99
Диагностическая работа №9 101
Диагностическая работа №10 102

Задания с кратким ответом (задачи 1—12). Диагностические работы 103
Диагностическая работа №11 104
Диагностическая работа №12 106
Диагностическая работа №13 108
Диагностическая работа №14 111
Диагностическая работа №15 113
Диагностическая работа №16 116

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 13—19 119
Диагностическая работа №17 120
Диагностическая работа №18 122
Задача 13 124
Задача 14 127

Задача 15 130
Задача 16 132
Задача 17 136
Задача 18 141
Задача 19 144
Диагностическая работа №19 148
Диагностическая работа №20 150

Тренировочные варианты ЕГЭ по математике 152
Диагностическая работа №21 153
Диагностическая работа №22 157
Диагностическая работа №23 161
Диагностическая работа №24 165
Диагностическая работа №25 169
Диагностическая работа №26 173
Диагностическая работа №27 177
Диагностическая работа №28 181
Диагностическая работа №29 185
Диагностическая работа №30 189

Ответы 193