ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЭКСПЕРТ ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

- Необходимый теоретический материал
- Тематические тестовые задания (более 1000 задач)
- 38 вариантов типовых тестовых заданий
- Решения и ответы

2016

ЕГЭ

ЭКСПЕРТ В ЕГЭ

Л. Д. Лаппо
М. А. Попов

Математика

ЭКСПЕРТ В ЕГЭ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

Необходимый теоретический материал
Тематические тестовые задания
(более 1000 задач)
38 вариантов типовых тестовых заданий
Решения и ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2016

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Л24

Лаппо Л. Д.

Л24 ЕГЭ 2016. Математика. Эксперт в ЕГЭ / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. — М. : Издательство «Экзамен», 2016. — 335, [1] с. (Серия «Эксперт в ЕГЭ»)

ISBN 978-5-377-09780-8

Предлагаемое пособие поможет выпускникам подготовиться к сдаче Единого государственного экзамена по математике.

Книга содержит общие сведения о Едином государственном экзамене по математике, необходимый теоретический материал, тематические тестовые задания (более 1000 задач) по всем проверяемым элементам содержания, а также 38 вариантов типовых тестовых заданий, созданных по аналогии с заданиями ЕГЭ.

Разделы пособия соответствуют плану экзаменационной работы ЕГЭ, а типы заданий — типам заданий, предлагаемых в контрольных измерительных материалах. Это даст возможность отработать как все темы в целом, так и только те, которые покажутся сложными. Тематические тестовые задания помогут закрепить изученный материал и устранить пробелы, а выполнение типовых тестовых заданий приблизит ситуацию к экзаменационной. Ко всем заданиям даны ответы, приведено решение четырех вариантов тестовых заданий, а также множество тематических тестовых заданий.

Пособие рассчитано на выпускников средних школ, оно может быть также использовано учителями математики для подготовки учащихся к ЕГЭ.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 11,06. Усл. печ. л. 21.
Тираж 10 000 экз. Заказ №790.

ISBN 978-5-377-09780-8

Содержание

КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

1. Алгебра

1.1. Числа, корни и степени

Определение. Множества чисел:

Натуральные числа $N = \{1, 2, 3...\}$

Целые числа $Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Рациональные числа $Q = \left\{ q \middle| q = \frac{m}{n}, \text{где } m \in \mathbb{Z} \text{ и } n \in \mathbb{N} \right\}$

Иррациональные числа $I = \left\{ q \middle| q \neq \frac{m}{n}, \text{где } m \in \mathbb{Z} \text{ и } n \in \mathbb{N} \right\}$

Действительные числа $R = Q \cup I$

Данные множества чисел связаны соотношением:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \supset I$$

Определение. *Дробью* или *отношением* называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — некоторые числа.

Определение. *Процентом числа a* называется сотая его часть.

Простой процентный рост:

$$S_n = \left(1 + \frac{pn}{100}\right) S,$$

где S — начальная сумма вклада, $p\%$ — месячный процент, n — число месяцев.

Сложный процентный рост:

$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n S.$$

Определение. *Пропорцией* называется равенство двух отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Основное свойство пропорции: равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ является пропорцией тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Определение. Две величины называются *пропорциональными,* если при изменении одной из них в несколько раз другая изменяется в такое же количество раз. Две величины называются *обратно пропорциональными,* если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается в такое же количество раз.

Определение. *Арифметический корень* из неотрицательного числа a n-й степени или просто *корень n-й степени* есть такое число b, что $b^n = a$, причем $a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число a при этом называют *подкоренным выражением*. Корень второй степени также называют *квадратным корнем* и пишут $\sqrt{a}$ вместо $\sqrt[2]{a}$. Корень третьей степени также называют *кубическим корнем*.

Свойства корня n-й степени

Для любых $a, b, c \in R, a, b, \geq 0, c > 0; m, k, n \in N$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}} \qquad \sqrt[k]{a^m} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^m \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Определение. *Степенью* некоторого числа a с показателем b называется выражение a^b, которое определяется следующим образом:

1. $a^b = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b}$, если $b \in \mathbb{N}$. При этом $a^1 = a$, а саму степень называют *степенью с натуральным показателем.*
2. $a^0 = 1$, если $a \neq 0$.
3. $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$, если b — это целое отрицательное число. Объединяя пункты 1, 2 и 3, получаем понятие *степени с целым показателем.*
4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если $a > 0$ и $b = \frac{m}{n}$, где m — целое и n — натуральное.

Если же $a = 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$ $(m \in N)$. При этом саму степень называют *степенью с рациональным показателем.*

Свойства степени

Для любых $a, b > 0$, для любых $p, q \in R$

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad \left(a^p\right)^q = a^{pq}$$

$$\left(ab\right)^p = a^p b^p \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

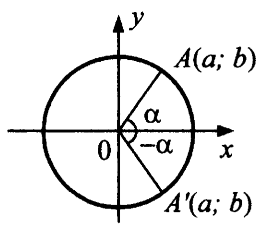
1.2. Основы тригонометрии

Определение. *Радианной мерой угла* называется отношение длины дуги, на которую опирается угол, к радиусу окружности, центральным углом которой является данный угол.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ радиан}$$

Рассмотрим круг с центром в (0; 0) и радиусом 1. Для любого $\alpha \in R$ можно провести радиус $0A$ так, что радианная мера угла между $0A$ и осью $0x$ равна α. Положительным считается направление против часовой стрелки. Пусть конец радиуса A имеет координаты $(a; b)$.



Определение. Число b, равное ординате конца единичного радиуса, построенного описанным способом, называется *синусом* угла α и обозначается $\sin\alpha$.

Определение. Число a, равное абсциссе конца единичного радиуса, построенного описанным способом, называется *косинусом* угла α и обозначается $\cos \alpha$.

Определение. Функция $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, называется *тангенсом* угла x.

Определение. Функция $\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ при $x \neq \pi k$, $k \in Z$ называется *котангенсом* угла x.

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

α										
α	рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	град	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α		–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad |\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}; \qquad \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}.$$

Формулы приведения

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.
2) $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$; $\mathrm{tg}(\alpha + \pi n) = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi n) = \mathrm{ctg}\alpha$, $n \in Z$.

3) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$; $\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi) = \mathrm{ctg}\alpha$.

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$; $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\mathrm{tg}\alpha$.

Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}.$$

Формулы двойного угла

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}; \ \mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Формулы тройного угла

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \ \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}; \ \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \beta),$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, а β определяется из соотношений

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \ \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Разложение произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\bigr);$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\bigr);$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\bigl(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\bigr).$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \ \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \ \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}; \ \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

1.3. Логарифмы

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тогда уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень. Он называется *логарифмом числа b по основанию a* и обозначается $\log_a b$.

Свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0 \ (a > 0, a \neq 1)$
2. $\log_a a = 1 \ (a > 0, a \neq 1)$
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \ (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$
4. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \ (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$
5. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b \ (a > 0, a \neq 1, b > 0)$
6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \ (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$
7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \ (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$
8. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \ (a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0)$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Определение. *Десятичный логарифм* числа — это логарифм этого числа по основанию 10. Десятичный логарифм числа b обозначается $\lg b$.

Определение. *Натуральный логарифм* числа — это логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, определяемое следующим образом:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Приближенное значение числа $e \approx 2{,}7182818$.

Натуральный логарифм числа b обозначается $\ln b$.

1.4. Модуль числа

Определение. *Модуль или абсолютная величина числа x* — это расстояние от точки x на числовой прямой до начала координат. Обозначение $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0 \quad |x^n| = |x|^n \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

С помощью модуля можно выражать расстояние на числовой прямой: $|x - a|$ — есть расстояние между точками с координатами x и а.

2. *Уравнения и неравенства*

2.1. Уравнения

Определение. *Уравнение* — это равенство, содержащее символы неизвестных или переменных. Например, если $f(x)$ и $g(x)$ — функции, то равенство

$$f(x) = g(x)$$

задает уравнение с одной переменной.

Определение. *Область допустимых значений* (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ — это множество тех значений переменной, при которых одновременно определены обе части уравнения $f(x)$ и $g(x)$.

Определение. *Корень уравнения* — это значение переменной, которое удовлетворяет ОДЗ и при котором уравнение обращается в верное числовое равенство, т.е. это такое число $p \in$ ОДЗ, что

$$f(p) = g(p).$$

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Определение. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются *равносильными*, если совпадают множества их корней.

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую со знаком минус, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ и нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 6. Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a>0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Методы решения уравнений

1. **Метод разложения на множители.** Этот метод заключается в том, что уравнение

$$f(x)g(x)h(x) = 0$$

можно заменить совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0. \\ h(x)=0 \end{array}\right.$$

Решив уравнения совокупности, нужно взять только те решения, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные корни отбросить.

2. **Метод замены переменной.** Этот метод заключается в том, что, если уравнение

$$f(x) = 0$$

сводится к уравнению

$$h(g(x)) = 0,$$

то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, затем решить уравнение $h(u) = 0$, а в конце решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=u_1 \\ \ldots \\ g(x)=u_n \end{array}\right.,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — корни уравнения $h(u) = 0$.

3. **Использование свойств функций.** Пусть у нас имеется уравнение $f(x) = g(x)$. Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень, который иногда легко угадывается.

4. **Использование графиков.** Суть метода использования графиков для решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти все точки их пересечения, абсциссы которых и будут являться корнями нашего исходного уравнения.

Квадратные уравнения

Определение. *Квадратное уравнение* — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — переменная. a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Если $a = 1$ (то есть уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$), то уравнение называется приведенным квадратным уравнением.

Решение квадратного уравнения:

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение легко разрешимо: $x = -\frac{c}{b}$.

Если $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, то любое число является корнем квадратного уравнения.

Если $a = 0$ и $b = 0$, но $c \neq 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Далее будем считать, что $a \neq 0$. Преобразуем эквивалентным образом квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ (поделили на } a \neq 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то квадрат слева равен отрицательному числу справа, чего быть не может. Следовательно, квадратное уравнение корней не имеет.

Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то уравнение равносильно тому, что $x + \dfrac{b}{2a} = 0$. В этом случае квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение равносильно тому, что

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Следовательно, квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Число D называют дискриминантом квадратного уравнения.

Теорема (Виета). Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет корни x_1 и x_2 (в случае $D = 0$ считаем, что есть два совпадающих корня), то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Утверждение. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ разлагается на линейные множители, т.е.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 (в случае $D = 0$ считаем, что x_1 и x_2 — два совпадающих корня).

Рациональные уравнения

Определение. *Рациональным уравнением* называется уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0,$$

где x — переменная или неизвестная, а $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ числовые коэффициенты.

Теорема. Целые корни уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

являются делителями свободного члена, т.е. если p — корень уравнения и $p \in \mathbb{Z}$, то $a_0 \vdots p$.

Теорема. Если рациональное число $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0,$$

то p является делителем свободного члена a_0, а q — делителем старшего коэффициента a_n т.е. $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.

Пример: Решим уравнение $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$.

Если у данного уравнения есть целые корни, то они являются делителями числа (–2), т.е. это могут быть числа $\pm 1, \pm 2$. Подстановкой данных чисел убеждаемся, что $x_1 = 1$ является корнем уравнения. Многочлен можно разложить на множители:

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 4x + 2).$$

Теперь решим уравнение

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{2}, x_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}, x_3 = -1 - \sqrt{2}$.

Определение. *Дробно-рациональным уравнением* называется уравнение вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = 0, a_n \neq 0 \text{ и } b_m \neq 0$$

где x — переменная или неизвестная, а $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и b_m, $b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ — числовые коэффициенты.

Общий метод решения дробно-рациональных уравнений сводится к решению рационального уравнения:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

и удалению всех корней x_i данного уравнения, для которых знаменатель дробно-рационального уравнения обращается в ноль, т.е.

$$b_m x_i^m + b_{m-1} x_i^{m-1} + \ldots + b_2 x_i^2 + b_1 x_i + b_0 = 0.$$

Пример: Решим дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{x^7 - 9x^5 + 2x^2 - 2x - 24}{x^7 - 9x^5 + 3x^2 + 3x - 18} = 1.$$

Перейдем к стандартному виду:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^7 - 9x^5 + 3x^2 + 3x - 18} = 0.$$

Решив уравнение $x^2 + 5x + 6 = 0$, получим $x_1 = -2, x_2 = -3$. Подставив данные значения в знаменатель, получаем, что уравнение имеет единственный корень $x_1 = -2$.

Ответ: $x_1 = -2$.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Определение. *Уравнениями с двумя переменными* называются уравнения, в которых хотя бы одна часть имеет две различные переменные, т.е. это уравнения вида:

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2),$$

где x_1, x_2 — переменные или неизвестные.

Определение. Пара чисел $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ называется *решением уравнения* $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$, если числовые выражения $f\left(x_1^0, x_2^0\right)$ и $g\left(x_1^0, x_2^0\right)$ определены и выполняется равенство:

$$f\left(x_1^0, x_2^0\right) = g\left(x_1^0, x_2^0\right).$$

Одним из основных способов решения подобных уравнений является выражение одних переменных через другие.

Пример: Решим уравнение $x - y^3 = 3$. Для этого выразим величину x через y: $x = y^3 + 3$. Тогда решением данного уравнения является пара $(t^3 + 3, t)$, для любого $t \in \mathbb{R}$.

В некоторых ситуациях приходится решать сразу несколько уравнений, причем на решения всех этих уравнений накладывается ограничение, чтобы решение одного уравнения было одновременно решением и всех остальных уравнений. Для этой цели данные уравнения объединяют в систему:

$$\Sigma = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1, x_2) = 0 \end{cases}.$$

Определение. Пара чисел $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ называется *решением системы уравнений* Σ, если числовые выражения $f_1\left(x_1^0, x_2^0\right)$, ..., $f_m\left(x_1^0, x_2^0\right)$ определены и выполняются равенства:

$$\begin{cases} f_1\left(x_1^0, x_2^0\right) = 0 \\ \ldots \\ f_m\left(x_1^0, x_2^0\right) = 0 \end{cases}$$

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что система решений не имеет.

Определение. *Система линейных уравнений* — это система, в которой все функции линейны, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Решения системы линейных уравнений определяются условиями:

1. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, но при этом $a_{11}b_2 \neq a_{21}b_1$ или $a_{12}b_2 \neq a_{22}b_1$.

2. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
3. Система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{12}b_2 - a_{22}b_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1 = 0$.

2.2. Неравенства

Определение. *Неравенство с одной переменной x* — это пара функций $f(x)$ и $g(x)$, связанные одним из знаков: $>, <, \geq, \leq$. Например:

$$f(x) \leq g(x).$$

Определение. *Область допустимых значений* (ОДЗ) *неравенства* $f(x) * g(x)$, где $* \in \{>, <, \geq, \leq\}$ — это множество тех значений переменной, при которых одновременно определены обе части неравенства $f(x)$ и $g(x)$.

Определение. *Решение неравенства* — это значение переменной, которое удовлетворяет ОДЗ и при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство. Решить неравенства означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Определение. Неравенства $f(x) *_1 g(x)$ и $p(x) *_2 h(x)$, где $*_1, *_2 \in \{>, <, \geq, \leq\}$, называются *равносильными*, если совпадают множества их решений.

Квадратные неравенства

Определение. *Квадратные неравенства* — это неравенства, сводимые к виду

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

где a, b, c — числовые коэффициенты, а x — переменная или неизвестная. Если неравенство имеет вид

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

то говорят, что неравенство строгое.

Для решения квадратных неравенств используют два основных этапа:

1. Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$;
2. Использование числовых промежутков.

Пусть уже решено квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Возможны следующие ситуации:

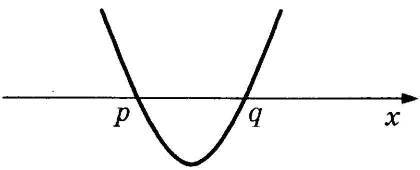
1. Нет корней. Тогда, если исходное неравенство имеет вид $ax^2+bx+c\le 0$ (или $ax^2+bx+c<0$) и

   а) существует такое число w, что $aw^2+bw+c>0$, то уравнение не имеет решений;

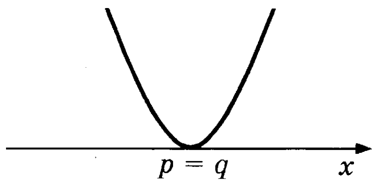
   б) не существует такого числа w, что $aw^2+bw+c>0$, то любое число является решением уравнения;

2. Получили корни $x_1=p$ и $x_2=q$. Пусть для определенности $p\le q$. Возможны следующие ситуации:

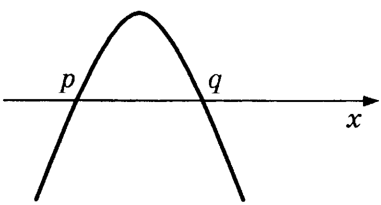
1) $y=ax^2+bx+c$



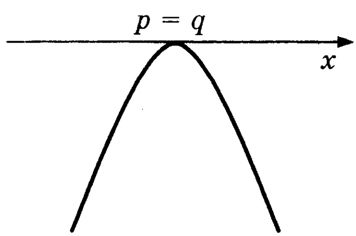
2) $y=ax^2+bx+c$



3) $y=ax^2+bx+c$

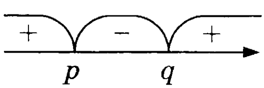


4) $y=ax^2+bx+c$

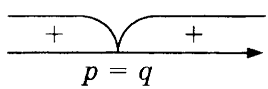


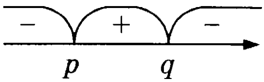
Которые в свою очередь можно записать в виде числовых промежутков:

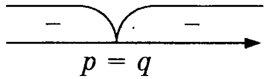
1)



2)



3) 

4) 

Поскольку решается неравенство $ax^2 + bx + c \le 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$), то решениями будут:

1) $p \le x \le q$ $(p < x < q)$ или $x \in [p; q]$ $\left(x \in (p; q)\right)$;

2) $x = p$ (нет решений);

3) $\left[\begin{array}{l} x \le p \\ x \ge q \end{array}\right. \left(\left[\begin{array}{l} x < p \\ x > q \end{array}\right.\right)$ или $x \in (-\infty; p] \cup [q; +\infty)$ $\left(x \in (-\infty; p) \cup (q; +\infty)\right)$;

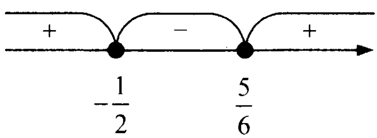
4) x — любое ($x \ne p$ или $x \in (-\infty; p) \cup (p; +\infty)$).

Пример. Решите неравенство $3x^2 - x - \dfrac{5}{4} \ge 0$.

Решение: Разложим квадратный трехчлен $3x^2 - x - \dfrac{5}{4}$ на множители. Для этого найдем его корни:

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \ x_2 = \frac{5}{6}.$$

$$3x^2 - x - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) \ge 0$$



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5}{6}; +\infty\right)$.

Рациональные неравенства

Определение. *Рациональные неравенства* — это неравенства, сводимые к виду

$$P(x) \le 0,$$

где $P(x)$ — произвольный многочлен, а x — переменная или неизвестная.

Если неравенство имеет вид

$$P(x) < 0,$$

то говорят, что неравенство строгое.

Для решения рациональных неравенств используют два основных этапа:

1. Решение рационального уравнения $P(x) = 0$;
2. Использование числовых промежутков.

Определение. *Дробно-рациональные неравенства* — это неравенства, сводимые к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0 \text{ или } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены, а x — переменная или неизвестная. Причем многочлен $Q(x)$ не является тождественно равным нулю.

Основным методом решения подобных неравенств является их сведение к рациональным неравенствам:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \le 0 \\ Q(x) \ne 0 \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$$

Полезные соотношения при решении уравнений и неравенств

При нахождении ОДЗ уравнений и при решении неравенств иногда бывают полезны следующие соотношения, истинные при любых $a \ge 0, b \ge 0$:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}; \ \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}; \ a \le \frac{a^2+1}{2};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2 \ \ (a \cdot b > 0); \ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2 \ \ (a \cdot b < 0).$$

Кроме того для любых a и b:

$$|a+b| \le |a| + |b|; \ |a+b| \ge |a| - |b|; \ a^2 + b^2 \ge 2|ab|.$$

3. Функции

Определение. *Функция* — это такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Обычно данную зависимость записывают в виде

$$y = f(x).$$

Переменная x называется независимой переменной или аргументом. Переменная y называется зависимой переменной и говорят, что переменная y является функцией от переменной x.

Определение. *Область определения функции* (ООФ) — это все значения независимой переменной, для которых выражение $f(x)$ определено, т.е. имеет смысл; *область значений функции* (ОЗФ) — это все значения, которые принимает зависимая переменная. Если задана некоторая функция f, то область ее определения и значения обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

График функции — это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Нули функции — это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

Определение монотонности. Функция f называется *возрастающей* на некотором промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1<x_2$ верно неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Функция f называется *убывающей* на некотором промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1<x_2$ верно неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Определение постоянства знака. Функция f сохраняет знак на некотором промежутке I, если для любого $x \in I$ верно одно из неравенств $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$.

Определение ограниченности. Функция f является *ограниченной сверху* на некотором промежутке I, если найдется такое число A, что для любого $x \in I$ верно неравенство $f(x) \le A$. Соответственно, функция f является *ограниченной снизу* на некотором промежутке I, если найдется такое число B, что для любого $x \in I$ верно неравенство $f(x) \geq B$.

Определение четности. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого значения аргумента x из области определения данной функции выполняется равенство.

$$f(x) = f(-x).$$

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения аргумента из ее области определения выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Определение периодичности. Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого значения аргумента x из области определения данной функции верно равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, который содержит эту точку.

Определение экстремума (локального максимума и минимума). Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех точек x которой выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$. Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех точек x которой выполняется неравенство: $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение наибольшего и наименьшего значения. Число A является *наибольшим значением функции* f на некотором промежутке I, если для любого $x \in I$ верно неравенство $f(x) \leq A$. Соответственно, число B является *наименьшим значением функции* f на некотором промежутке I, если для любого $x \in I$ верно неравенство $f(x) \geq B$.

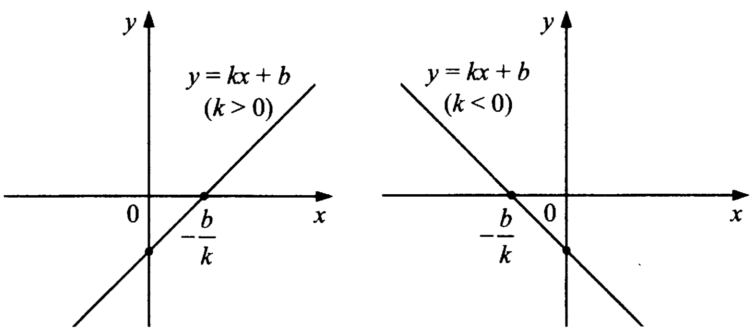
Опишем свойства основных элементарных функций.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция, заданная формулой вида $y = kx + b$, где x — аргумент, k и b — коэффициенты. Число k называется угловым коэффициентом прямой.

Свойства линейной функции $y = kx + b$ ее график:

1. Область определения функции есть вся числовая прямая. Область значения есть точка 0 при $k = 0$ и вся прямая при $k \neq 0$.
2. Если $k = 0$, то функция тождественно равна 0.
3. Если $k > 0$, то она возрастает на всей прямой; если $k < 0$, то она убывает на всей прямой.
4. Функция периодична, если и только если $k = 0$.
5. Функция четна, если и только если $k = 0$, и нечетна, если и только если $b = 0$.
6. Точек наибольшего и наименьшего значения нет при $k \neq 0$.
7. При $k = 0$ график функции есть прямая, параллельная оси Ox, пересекающая ось Oy в точке $(0; b)$.
8. При $k \neq 0$ график функции есть прямая, проходящая через точки $(0; b)$ и $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$.



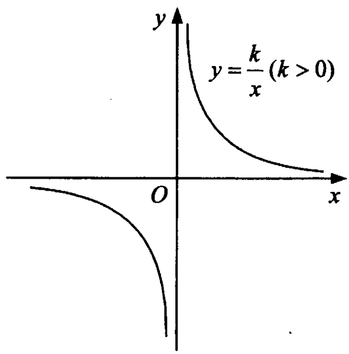
Геометрически коэффициент k отвечает за наклон прямой $y = kx + b$, а коэффициент b — за параллельный сдвиг вдоль оси Oy.

Гиперболическая функция

Гиперболической функцией называется функция, заданная формулой вида $y = \frac{k}{x} + b$, где x — аргумент, k и b — коэффициенты.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ ее график:

1. Область определения функции есть множество всех $x \neq 0$. Область значения есть точка 0 при $k = 0$ и множество всех $y \neq 0$ при $k \neq 0$.
2. Если $k = 0$, то функция тождественно равна 0.
3. Если $k > 0$, то она убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; если $k < 0$, то она возрастает на каждом из этих промежутков.
4. Функция периодична, если и только если $k = 0$.
5. Функция нечетна, если и только если $k \neq 0$, иначе она одновременно четна и нечетна.
6. Точек наибольшего и наименьшего значения нет при $k \neq 0$.
7. При $k = 0$ график функции есть прямая, совпадающая с осью Ox.
8. При $k > 0$ график функции есть гипербола, проходящая в I и в III четвертях; при $k < 0$ график функции есть гипербола, проходящая во II и в IV четвертях.



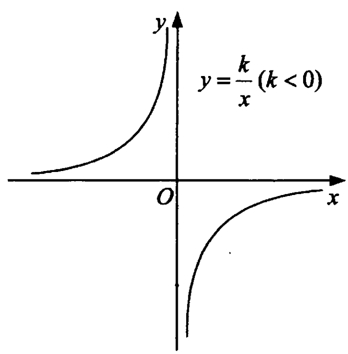


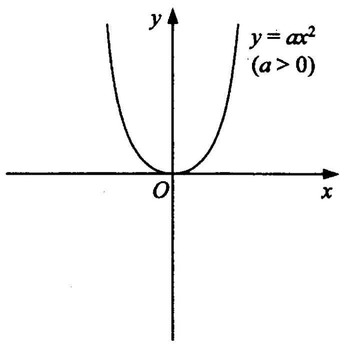
График функции $y = \frac{k}{x} + b$ получается из графика функции $y = \frac{k}{x}$ параллельным переносом вдоль оси y на b единиц. Геометрически коэффициент k отвечает за кривизну графика $y = \frac{k}{x} + b$, а коэффициент b — за параллельный сдвиг вдоль оси Oy.

Квадратичная функция

Квадратичная функция — это функция, заданная формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — аргумент, a, b, c — коэффициенты, причем $a \neq 0$. Графиком данной функции является парабола.

Свойства функции $y = ax^2$:

1. Область определения функции — вся числовая прямая. Область значения совпадает с положительным направлением оси Oy, при $a>0$, с отрицательным — при $a<0$, и есть точка 0 при $a = 0$.
2. Если $a = 0$, то функция тождественно равна 0.
3. При $a>0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; при $a<0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Функция периодична, если и только если $a = 0$.
5. Функция четна, поэтому график функции симметричен относительно оси Oy.
6. При $a>0$ $y_{мин} = 0$, при $a<0$ $y_{макс} = 0$.



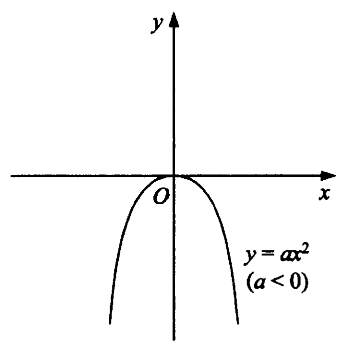


График функции $y = ax^2 + c$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси y на c единиц вверх при $c>0$ или на $(-c)$ единиц вниз, если $c<0$.

График функции $y = a(x - m)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси x на m единиц вправо при $m>0$ или на $(-m)$ единиц влево, если $m<0$.

Так как из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ всегда можно выделить полный квадрат $a(x - m)^2 + c$, то график произвольной квадратической функции $y = ax^2 + bx + c$ полностью определяется сдвигом и параллельным переносом вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Вершина параболы — это точка пересечения параболы с ее осью симметрии.

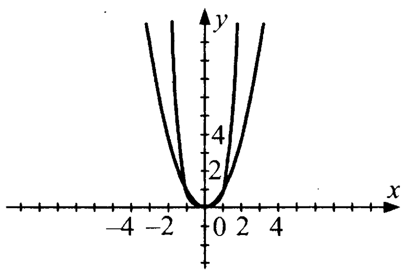
Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Степенная функция

Функция вида $y = x^n$, где n — целое, называется *степенной функцией с целым показателем*.

В зависимости от n рассмотрим 4 случая.



1) n — положительное, четное.

Функция имеет вид $y = x^{2m}$, где $m \in N$.

Область определения $D(x^{2m}) = R$.

Область значений $E(x^{2m}) = [0; +\infty)$.

Функция непериодическая, т.к. значение ноль она принимает только в точке $x = 0$.

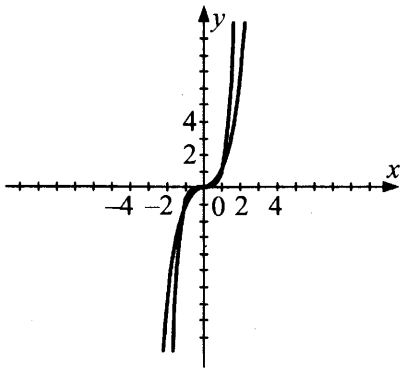
Функция четная, т.к. $y(-x) = (-x)^{2m} = ((-x)^2)^m = (x^2)^m = x^{2m} = y(x)$. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат: (0; 0).

Функция неотрицательна на R.

Функция не имеет наибольшего значения; наименьшее — при $x = 0$, $y(0) = 0$.

Свойство. Функция убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

2) n — положительное, нечетное.



Функция имеет вид $y = x^{2m+1}$.

$D(y) = R$; $E(y) = R$; функция непериодическая, нечетная.

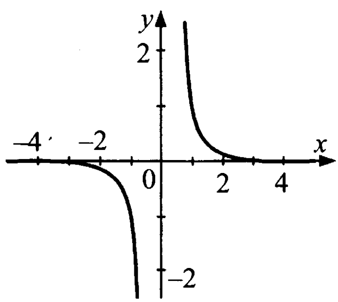
Функция пересекает оси координат в точке (0; 0).

$y(x) > 0$ при $x \in [0; +\infty)$, $y(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0]$.

Функция возрастает на R и не имеет наибольшего и наименьшего начений. Асимптот нет.

3) n — отрицательное, нечетное.

$y = \dfrac{1}{x^{2m-1}}$.



$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

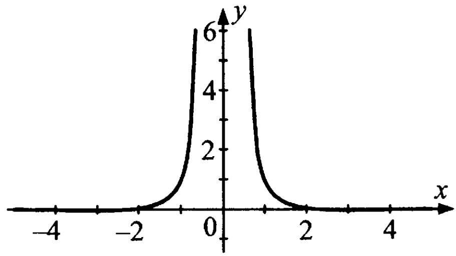
Функция непериодическая, нечетная.

Функция не пересекает оси координат.

$y(x) < 0$ при $x < 0$ и $y(x) > 0$ при $x > 0$.

Функция не имеет наименьшего и наибольшего значений.

Функция убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$.



4) n — отрицательное, четное.

$y = \frac{1}{x^{2m}}$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

$E(y) = (0; +\infty)$.

Функция непериодическая, четная, с осями координат не пересекается.

$y(x) > 0$ на всей области определения.

Функция не имеет наименьшего и наибольшего значений.

Убывает на $(0; +\infty)$, возрастает на $(-\infty; 0)$.

Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$.

Тригонометрические функции

1. Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

Область определения: $D(\sin x) = R$.

Область значений: $E(\sin x) = [-1; 1]$.

Наименьший положительный период: $T = 2\pi$.

Так как центральный угол, соответствующий полной окружности, равен 2π, то точки, соответствующие углам α, $(\alpha + 2\pi)$, $(\alpha + 4\pi)$ и т.д., совпадают.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, и равные по абсолютной величине углы при симметрии переходят в равные, то ординаты углов α и $(-\alpha)$ противоположны, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$, т.е. функция $\sin x$ нечетна.

Точки пересечения с осями. Из $\sin x = 0$ получаем $x = \pi n$ — точки пересечения с осью $0x$; из $\sin 0 = y$ получаем $y = 0$ — точка пересечения с осью $0y$.

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

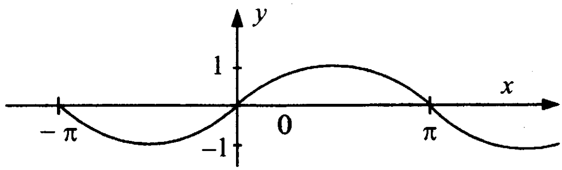
Наибольшее значение: $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Наименьшее значение: $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Функция возрастает на промежутках

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$,

убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$, график функции асимптот не имеет.



2. Рассмотрим функцию $y = \cos x$.

$D(\cos x) = R$, $E(\cos x) = [-1; 1]$.

Наименьший положительный период: $T = 2\pi$.

Построим на единичной окружности точки A и A', соответствующие углам α и $(-\alpha)$. Так как круг симметричен относительно $0x$, а равные по абсолютной величине углы при симметрии переходят в равные углы, то точки A и A' симметричны относительно $0x$, следовательно, их абсциссы равны, т.е. $\cos(-x) = \cos x$, т.е. $\cos x$ — четная функция.

Пересечение с 0x: найдем из уравнения $\cos x = 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Пересечение с 0y: $\cos 0 = y \Rightarrow y = 1$.

Промежутки знакопостоянства:

$\cos x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$;

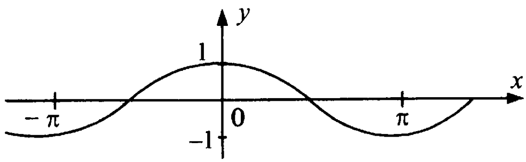
$\cos x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Наибольшее значение: $\cos x = 1$ при $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Наименьшее значение: $\cos x = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Функция возрастает на промежутках

$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, график функции асимптот не имеет.



3. Функция $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, называется *тангенсом* угла x.

Область определения — все действительные числа кроме точек $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Область значений $E(\text{tg}x) = (-\infty; +\infty)$.

Наименьший положительный период $T = \pi$: для любого $x \in D(\text{tg}x)$ справедливо $\text{tg}(x+\pi) = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \text{tg}x$, следовательно, π — период функции.

Пусть $\text{tg}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in Z$, т.е. π — наименьший положительный период.

$\text{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\text{tg}x$, функция нечетна.

Пересечение с осью абсцисс найдем из уравнения $\text{tg}x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$; с осью ординат из $\text{tg}0 = y \Rightarrow y = 0$.

$\text{tg}\, x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

$\text{tg}x < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in Z$.

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

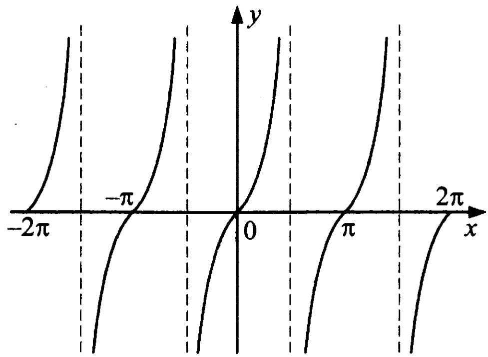
Свойство. Функция возрастает на каждом из интервалов $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $k \in Z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интервал $(0; \dfrac{\pi}{2})$.

Пусть $0 \le x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$. Здесь $\sin x$ возрастает, а $\cos x$ убывает, поэтому $0 \le \sin x_1 < \sin x_2 < 1$; $1 \ge \cos x_1 > \cos x_2 > 0$.

Поделив почленно неравенства разных знаков, содержащие только положительные числа, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. Аналогично доказывается возрастание на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

График имеет вертикальные асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.



4. Функция $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$ при $x \neq \pi k$, $k \in Z$ называется *котангенсом* угла x. Область определения — все действительные числа кроме точек $x = \pi k$, $k \in Z$, $E(\mathrm{ctg}x) = R$.

Наименьший положительный период $T = \pi$. Функция нечетна, аналогично $\mathrm{tg}x$.

Пересечение с осью абсцисс найдем из

$\mathrm{ctg}x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Точек пересечения с $0y$ нет, т.к. при $x = 0$ функция не определена;

$\mathrm{ctg}x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$,

$k \in Z$; $\mathrm{ctg}x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in Z$.

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Функция убывает на каждом из интервалов $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$, доказательство аналогично доказательству для функции $\mathrm{tg}x$.

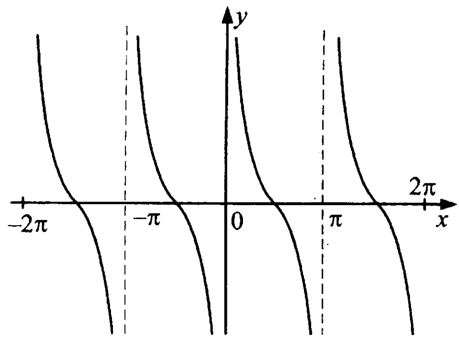


График функции имеет вертикальные асимптоты $x = \pi n$, $n \in Z$.

Показательная функция

Пусть $a \in R$, $a > 0$, $x \in R$, если $a = 1$, то $a^x = 1$ для любого x.

Пусть $a \neq 1$. Для любого $x \in R$ можно найти рациональные p и q такие, что $q \le x \le p$. Тогда числом a^x будем считать такое число, что

$$\begin{cases} a^q \le y = a^x \le a^p \text{ , где } a > 1 \\ a^p \le y = a^x \le a^q \text{ , где } 0 < a < 1 \end{cases}$$

для всех p и q таких, что $q \le x \le p$.

Теорема 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^x > 0$ для любого x.

Следствие: если $y \le 0$, то уравнение $a^x = y$ не имеет корней.

Функция $y = a^x$ называется *показательной*, a — основание.

$D(a^x) = R$, $E(a^x) = (0; +\infty)$

Функция непериодическая, любое из своих значений она принимает ровно в одной точке. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Пересечений с осью 0x нет; при $x = 0$, $y = a^0 = 1$, **пересечение с осью 0y** в точке (0; 1).

Функция положительна при всех x, не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Функция монотонна; при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.

Пусть $a > 1$, p и q — рациональные; $q < p$.

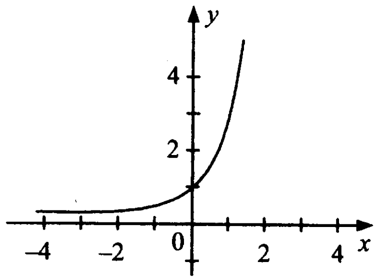
Тогда $a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1)$; $a^q > 0$; следовательно, знак разности $a^p - a^q$ определяется знаком $a^{p-q} - 1$.

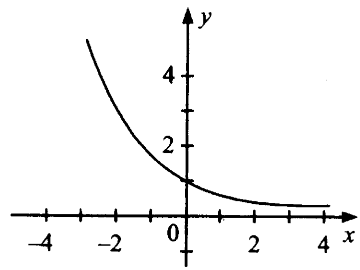
Пусть $p - q = \dfrac{m}{n} > 0$, тогда $a > 1 \Rightarrow a^m > 1 \Rightarrow (a^{\frac{m}{n}})^n > 1 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1$, т.е. $a^{p-q} > 1 \Rightarrow a^p > a^q$.

Из определения степени числа с действительным показателем следует, что $a^p \geq a^q$ для $p > q$; $p, q \in R$.

Равенства быть не может, т.к. уравнение $a^x = y$ всегда имеет единственный корень. Асимптота графика $y = a^x$ – ось $0x$.

$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$





Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, называется *логарифмической*.

$D(\log_a x) = (0; +\infty)$; $E(\log_a x) = R$.

Функция не является периодической, четной или нечетной, так как определена только для $x > 0$.

Пересечение с осью $0x$:

$\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$, точка $(1; 0)$.

При $a>1$ $y(x)>0$ при $x > 1$, $y(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$.

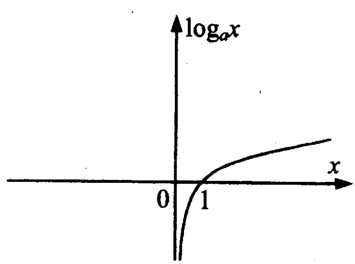
При $0< a < 1$, $y(x) > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y(x)<0$ при $x \in (1; +\infty)$.

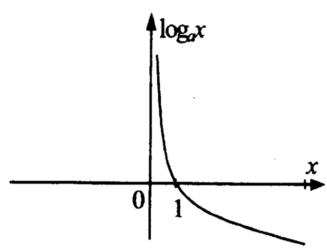
Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Свойство. При $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения, при $a>1$ — возрастает.

Асимптота графика функции — ось ординат $x = 0$.

$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$





4. Начала математического анализа

4.1. Производная

Определение. Пусть некоторая функция $f(x)$ определена на некотором промежутке I, x_0 — точка этого промежутка, число $h \neq 0$ таково, что x_0+h также принадлежит промежутку I. Тогда *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел разностного отношения $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует).

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке x_0, то данная функция называется *дифференцируемой в этой точке.*

Если функция $f(x)$ имеет производную во всех точках некоторого промежутка, то данная функция называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

Геометрический смысл производной некоторой дифференцируемой функции заключается в том, что значение производной функции в некоторой точке равняется угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Таблица 1

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$y=c$	$y'=0$	$y=ax+b$	$y'=a$
$y=x^2$	$y'=2x$	$y=x^3$	$y'=3x^2$
$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{-1}{x^2}$	$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=x^a$	$y'=ax^{a-1}$	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\cos x$	$y'=-\sin a$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Если в точке x существуют производные функций $u(x)$, $v(x)$, то справедливы соотношения:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';\ (u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\quad v \neq 0.$$

Производная функции вида $y = f(ax + b)$ равна $y' = af'(ax+b)$.

Функция вида $f(g(x))$ называется *сложной* функцией.

Производная сложной функции находится по формуле:

$$y' = f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

4.2. Исследование функций

Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция убывает на этом промежутке.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что при всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что при всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции в совокупности называются *точками экстремума* этой функции.

Теорема. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, тогда если x_0 — точка экстремума этой функции, то $f'(x_0)=0$.

Те точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными*.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0)=0$. Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума функции $f(x)$;
2) если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

4.3. Первообразная и интеграл

Определение. Пусть на некотором промежутке выполняется $F'(x) = f(x)$, тогда функция $y = F(x)$ называется *первообразной* для функции $y = f(x)$.

Теорема 1. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, тогда функция $F(x) + C$ тоже является первообразной для $f(x)$ на том же промежутке, где C — произвольная константа.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, $G(x)$ — для $g(x)$, тогда $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k — константа, тогда $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k, b — константы, $k\neq 0$, тогда $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица 2

Первообразные элементарных функций

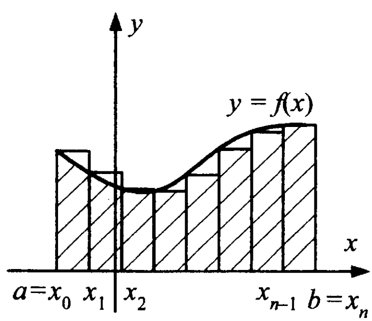
$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x+C$
x	$(x^2/2)+C$

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$1/x, x > 0$	$\ln x + C$
$1/x^2$	$-(1/x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$

Пусть нам необходимо найти площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Для простоты предполагаем, что $f(x) > 0$ на $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ построим прямоугольник высоты $f(x_{k-1})$. Сумма площадей всех прямоугольников:

$$\sum(a,b) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) .$$



При неограниченном увеличении n существует предел $S = \lim_{n\to\infty} \sum (a,b)$, который является искомой площадью. Этот предел называется определенным интегралом $f(x)$ от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Это формула Ньютона–Лейбница.

5. Геометрия

5.1. Планиметрия

Признаки равенства треугольников

Определение. Два треугольника называются *равными*, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.

1) (Первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними).
   Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
2) (Второй признак равенства треугольников — по стороне и прилежащим к ней углам).
   Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
3) (Третий признак равенства треугольников — по трем сторонам).
   Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Признаки подобия треугольников

1) (Первый признак подобия треугольников — по двум углам). Два треугольника являются подобными, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.
2) (Второй признак подобия треугольников — по двум сторонам и углу между ними). Два треугольника являются подобными, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны.
3) (Третий признак подобия треугольников — по трем сторонам). Два треугольника являются подобными, если все стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.
   Сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусов.

Неравенство треугольника: во всяком треугольнике каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Теорема косинусов: Квадрат любой стороны треугольника равен разности между суммой квадратов двух других сторон и удвоенным произведением этих сторон на косинус угла между ними.

Теорема синусов: Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны между собой.

Площадь треугольника равна половине произведения одной из его сторон на проведенную к этой стороне высоту:

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

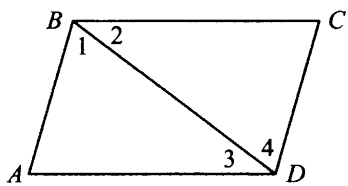
Площадь любого треугольника равна половине произведения любых двух его сторон на синус угла между ними.

Формула Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Определение. *Параллелограмм* — четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны.



Теорема 1 (свойство сторон и углов параллелограмма).

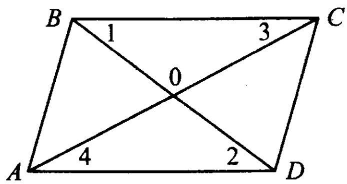
Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Тогда $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ и $\angle A + \angle B = 180°$.

Теорема 2 (признаки параллелограмма).

Если в выпуклом 4-угольнике $ABCD$: или 1) $AB = CD$ и $BC = AD$, или 2) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема 3 (свойство диагоналей).

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AC \cap BD = O$.



Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$.

Теорема 4 (признак параллелограмма).

Пусть $ABCD$ — 4-угольник, AC, BD — его диагонали, $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD$. Тогда $ABCD$ — параллелограмм.

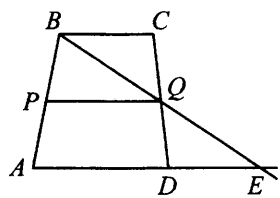
Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Трапеция

Определение. *Трапеция* — это четырехугольник, в котором две противоположные стороны параллельны (основания трапеции), а две другие — нет (боковые стороны трапеции).

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Определение. *Средняя линия трапеции* — это отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.



Теорема. Пусть PQ — средняя линия трапеции $ABCD$.
Тогда $PQ \parallel AD$, $PQ \parallel BC$,

$$PQ = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Правильные многоугольники

О п р е д е л е н и е. *Многоугольник* называется *выпуклым*, если этот многоугольник целиком находится в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Сумма всех внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

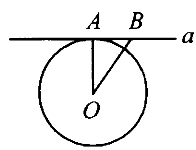
Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если все его стороны и углы равны.

Окружность

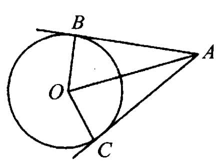
Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга

О п р е д е л е н и е. *Окружность — множество всех точек*, равноудаленных от данной точки (центра окружности). *Радиус окружности* — отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. *Секущая* — прямая, проходящая через 2 точки окружности. *Хорда* — отрезок, соединяющий 2 точки окружности. *Диаметр* — хорда, проходящая через центр. *Касательная* — прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку (точку касания).

Теорема 1 (свойство касательной). Пусть прямая a касается окружности с центром O в точке A. Тогда $OA \perp a$.



Теорема 2. Пусть A лежит вне окружности, AB и AC — касательные.



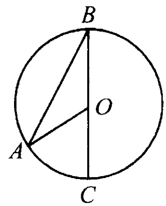
Тогда $AB = AC$ и $\angle BAO = \angle OAC$.

Теорема 3 (обратная к теореме 1). Пусть OA — радиус окружности, $a \perp OA$, $A \in a$. Тогда a — касательная.

О п р е д е л е н и е. *Центральный угол* — угол, образованный двумя радиусами окружности. *Вписанный угол* — угол, образованный двумя хордами, проведенными из одной точки окружности.

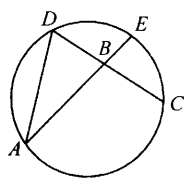
Теорема 1. Пусть $\angle ABC$ — вписанный в окружность с центром O.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.



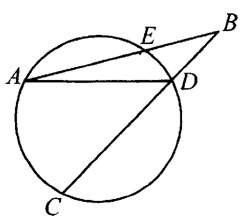
Теорема 2. Пусть AE и DC — хорды, пересекающиеся внутри круга.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DE})$.

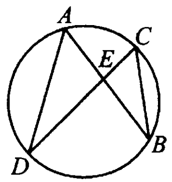


Теорема 3. Пусть AE и CD — отрезки секущих, пересекающихся вне круга в точке B.

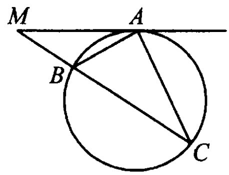
Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE})$.



Теорема 4. Пусть AB и CD — хорды окружности, $AB \cap CD = E$. Тогда $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.



Теорема 5. Пусть точка M вне круга, MA — касательная, MC — секущая. Тогда $MA^2 = MB \cdot MC$ (квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть).



Длина окружности: $l = 2\pi R$, где l — длина окружности, а R — ее радиус. Круг с центром в точке O радиуса R — это множество таких точек X, что $OX \leq R$. Площадь круга: $S = \pi R^2$, где S — площадь круга, а R — его радиус.

Векторы

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой — концом.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *одинаково направленными*, если две полупрямые AB и CD направлены одинаково.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *противоположно направленными*, если две полупрямые AB и CD направлены противоположно.

Абсолютной величиной (модулем) вектора называют длину отрезка, который изображает вектор. Обозначается $|\vec{a}|$.

Нулевым вектором называется такой вектор, начало которого совпадает с его концом.

Два вектора равны, если они совмещаются параллельным переносом.

Равные векторы одинаково направлены и равны по модулю, и обратно: если два вектора одинаково направлены и равны по модулю, то они равны.

Пусть точка $A_1(x_1;y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, а точка $A_2(x_2; y_2)$ — его конец. Тогда *координатами вектора* $\vec{a}$ называются *числа* $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$.

Суммой двух векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ *и* $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется вектор $\vec{c}$ $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$.

Произведением вектора $\overrightarrow{(a_1,a_2)}$ *на число* α называется вектор $\overrightarrow{(\alpha a_1,\alpha a_2)}$.

Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{(a_1,a_2)}$ и $\overrightarrow{(b_1,b_2)}$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их модулей на косинус угла между этими векторами.

5.2. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой и плоскостью

Пусть α — плоскость, a — пересекающая эту плоскость прямая. *Проекцией прямой a на плоскость* α называется прямая a', которая является множеством оснований перпендикуляров, опущенных из всех точек прямой a на плоскость α.

Углом между прямой a и плоскостью α называется угол между прямыми a и a'.

Угол между плоскостями. Двугранный угол

Пусть две плоскости пересекаются. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями и общей ограничивающей их прямой.

Эти полуплоскости называются *гранями двугранного угла*, а ограничивающая эти плоскости прямая — *ребром* данного *двугранного угла.*

Проведем плоскость, перпендикулярную ребру; она пересечет данные плоскости по двум полупрямым.

Образованный этими полупрямыми угол называется *линейным углом двугранного угла.*

Определение. *Углом между пересекающимися плоскостями* называется линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями.

Угол между скрещивающимися прямыми

Определение. *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между прямыми, которые параллельны исходным и пересекаются.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение. *Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых* называют отрезок, концы которого лежат на этих прямых и который перпендикулярен каждой из них.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра этих двух прямых.

Расстояние от точки до прямой

Определение. *Расстоянием от точки до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного от данной точки на данную прямую.

5.3. Многогранники

Призма

Определение. *Призмой* называется многогранник, состоящий из двух равных выпуклых плоских многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, лежащих в параллельных плоскостях, и отрезков A_1B_1; A_2B_2; ...; A_nB_n. Многоугольники называются *основаниями призмы,* а отрезки, которые соединяют соответствующие вершины этих многоугольников — *боковыми ребрами.*

Свойство 1. Боковые ребра призмы параллельны и равны.

Определение. *Высотой призмы* называется расстояние между основаниями.

О п р е д е л е н и е. *Боковыми гранями призмы* $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются четырехугольники $A_1B_1B_2A_2$; $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$. *Площадью боковой поверхности призмы* называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Теорема 1. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S \cdot H.$$

Теорема 2. Площадь поверхности призмы равна сумме двух площадей основания и площади боковой поверхности

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок.}}$$

О п р е д е л е н и е. *Прямой призмой* называется призма, основания которой перпендикулярны боковым ребрам.

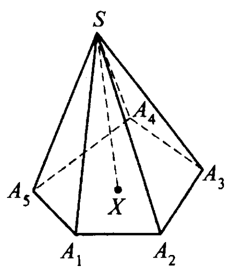
Теорема 3. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту

$$V = P_{\text{осн}} \cdot H.$$

Пирамида

О п р е д е л е н и е. *Пирамида* — многогранник, состоящий из плоского выпуклого многоугольника, называемого *основанием пирамиды,* точки, не лежащей в плоскости основания, называемой *вершиной пирамиды*, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания. Отрезки, которые соединяют вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами.*

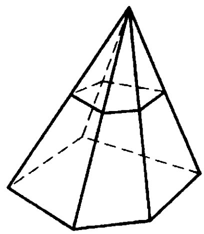
О п р е д е л е н и е. Опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания перпендикуляр называется *высотой пирамиды. Площадью боковой поверхности пирамиды* называется сумма площадей всех ее граней.



Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней и площади основания.

Правильная пирамида — пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой. Правильная треугольная пирамида называется *тетраэдром*.

Теорема. Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная основанию, отсекает подобную пирамиду.



Определение. Часть пирамиды без ее отсеченной части называется *усеченной пирамидой.*

Теорема. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

Теорема. Объем усеченной пирамиды равен $V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$,

где h — высота усеченной пирамиды, S_1, S_2 — площади ее оснований.

Правильные многогранники

Определение. *Выпуклый многогранник* называется *правильным,* если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одинаковое число ребер.

1. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, называется *правильным тетраэдром*.
2. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по четыре ребра, называется *октаэдром*.

3. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по пять ребер, называется *икосаэдром*.
4. Выпуклый многогранник со сторонами — квадратами и такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, называется *кубом*.
5. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными пятиугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по пять ребер, называется *додекаэдром*.

Других правильных многогранников не существует.

5.4. Тела вращения

Прямой круговой цилиндр

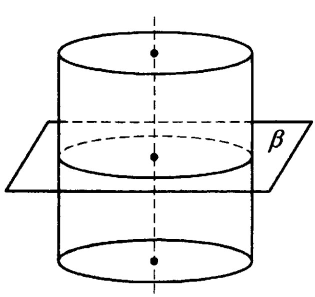
Определение. *Цилиндр* — это тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Данные круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, — *образующими цилиндра*.

Определение. Если образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований, то цилиндр называется *прямым*.

Свойство 1. Образующие любого цилиндра параллельны и равны.

Свойство 2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей боковую поверхность, является окружностью, равной окружности основания.



Теорема 1. Объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot h$, где h — высота цилиндра.

Теорема 2. Площадь поверхности прямого кругового цилиндра равна $2\pi R^2 + 2\pi R \cdot l$, где l — длина образующей.

Прямой круговой конус

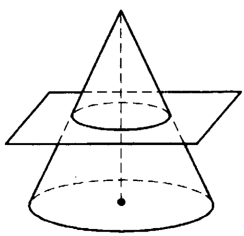
Определение. *Конус* — это тело, состоящее из круга — *основания конуса,* точки, не лежащей в плоскости этого круга — *вершины конуса,* всех отрезков, соединяющих точки основания с вершиной, и такое, что прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания конуса, перпендикулярна плоскости основания.

Высота конуса — перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.

Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Проведем сечение конуса плоскостью, параллельной основанию.

Нижняя часть конуса называется *усеченным конусом.*



Теорема. Объем конуса равен одной третьей произведения площади основания на высоту.

Объем усеченного конуса равен $V = \frac{1}{3}h(\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2)$, h — высота усеченного конуса, а R, r — радиусы оснований.

Шар и сфера

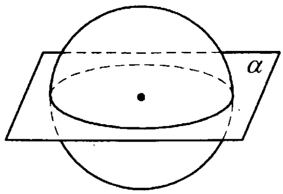
Определение. Тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем заданного от некоторой данной точки, называется *шаром.* Эта точка — *центр шара,* а заданное расстояние — *радиус.*

Определение. Граница шара называется *сферой.*

Определение. Отрезок, который соединяет две точки сферы и проходит через центр шара, называется *диаметром.*

Свойство 1. Любое сечение шара плоскостью есть круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Определение. Плоскость, которая проходит через центр шара, называется *диаметральной плоскостью.* Сечение ею шара — *большим кругом,* а сечение сферы — *большой окружностью.*



Теорема. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Определение. Плоскость, проходящая через точку R сферы и перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью.* Точка R называется *точкой касания.*

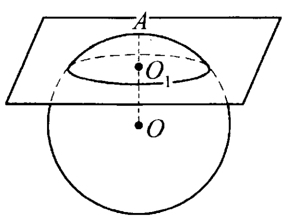
Теорема. Касательная плоскость пересекается с шаром в единственной точке — в точке касания.

Теорема. Линией пересечения двух сфер является окружность.

Теорема. Объем шара равен

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

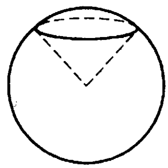
Определение. *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.



$O_1A = H$ — высота шарового сегмента.

Свойство. Объем шарового сегмента равен $\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$, где H — высота шарового сегмента.

Определение. *Шаровым сектором* называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса, основанием которого является сечение плоскостью данного шара.



Свойство. Объем шарового сектора равен $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Теорема. Площадь сферы радиуса R вычисляется по следующей формуле: $S = 4\pi R^2$.

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (1–14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (15–20) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком.

Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

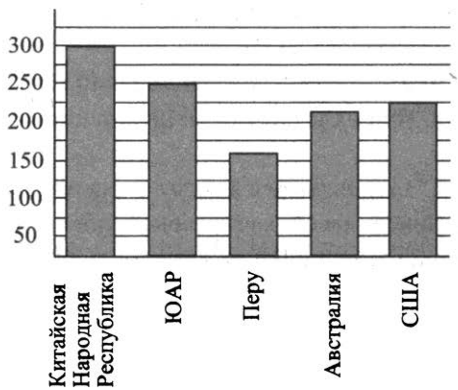
Желаем успеха!

Вариант 1

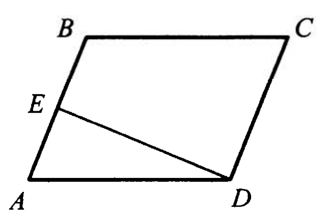
Часть 1

1. Билет на автобус стоит 35 рублей. Какое максимальное число билетов на автобус можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 15%?

2. На диаграмме показано распределение добычи золота в 5 странах мира (в тысячах тонн) за 2012 год. Какое место занимала Австралия среди этих стран?



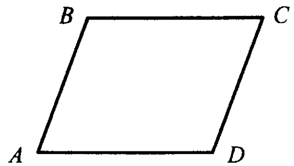
3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 219, точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции $BCDE$.



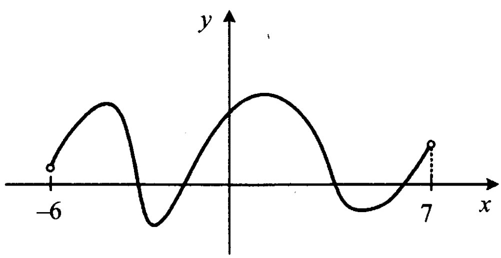
4. Завод выпускает холодильники. В среднем на 1000 качественных холодильников приходится 89 холодильников со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $(2x-1)^2=(1-x)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

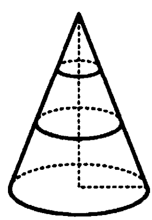
6. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 13 : 23. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график первообразной $y=F(x)$ некоторой функции $y=f(x)$, определенной на интервале (–6; 7). Пользуясь рисунком, определите количество нулей функции $f(x)$ на данном интервале.



8. В конусе проведено два сечения плоскостями, параллельными плоскости основания конуса. Точками пересечения данных плоскостей с высотой конуса, она делится на 3 равных отрезка. Найдите объем средней части конуса, если объем нижней части равен 38.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $3^{2+\log_9 16}$.

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 150 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 560 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. В сосуд, содержащий 8 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 2 литра воды. Какова концентрация получившегося раствора? Ответ дайте в процентах.

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + 11$.

13. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5.

а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостями ABD и CAD_1.

б) Найдите тангенс этого угла.

15. Решите неравенство: $4\log_{16}\frac{x^3}{3x+1} + 3\log_8\frac{3x+1}{x} < 1$.

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC (с основанием AC), касается его боковых сторон в точках M и N. Точка M делит боковую сторону на отрезки 10 и 7, считая от основания треугольника ABC.

а) Докажите, что треугольники MBN и ABC подобны.

б) Найдите отношение площадей треугольника MBN и трапеции $AMNC$.

17. 15 декабря 2014 года Андрей взял в банке 108 500 рублей в кредит под 17% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 15 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-15 - 8x - x^2} = 4a + 1$ имеет единственный корень.

19. Сколько решений (т.е. различных пар $(x;\ y)$) в натуральных числах имеет уравнение $\log_4 5^{xy} = 3\log_{64} 5^{2013}$?

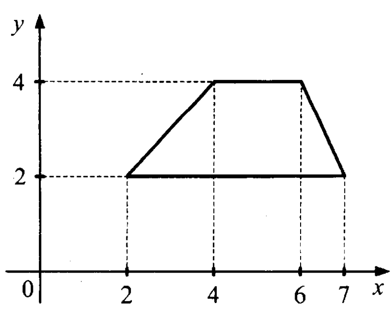
Вариант 2

Часть 1

1. Тетрадь стоит 6 рублей. Какую сдачу получит покупатель со 100 рублей при покупке 10 тетрадей после повышения цены тетради на 10%?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2013 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из указанного периода выпадало менее 2 миллиметров осадков.

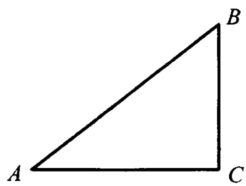
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (7; 2), (6; 4), (4; 4).



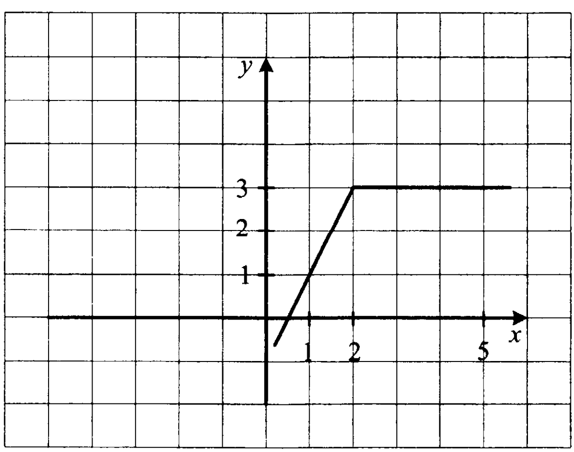
4. В городе N есть три фабрики, выпускающие автомобильные шины. Первая фабрика выпускает 30% этих шин, вторая — 45%, третья — 25%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных шин, вторая — 6%, третья — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине шина не окажется бракованной.

5. Решите уравнение $\frac{3-7x}{2}=12$.

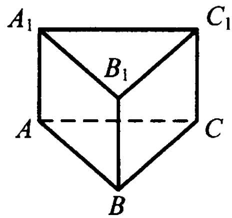
6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, $\sin B = \frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите $7\cos B$.



7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $\int\limits_1^5 f(x)dx$.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной $3\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_2 76,8 - \log_2 2,4$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t) = -t^2 + 6t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 8 метров.

11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x+4)^2 e^{2-x}$.

13. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.

14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Опустите перпендикуляр из точки D на плоскость CAD_1.

б) Найдите его длину.

15. Решите неравенство: $\dfrac{1-\log_2\left(2x^2-9x+9\right)}{\log_3\left(x+8\right)} \geq 0$.

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник *ABC* (с основанием *AC*), касается его боковых сторон в точках *M* и *N*. Точка *M* делит боковую сторону на отрезки 18 и 12, считая от основания треугольника *ABC*.

а) Докажите, что треугольники *MBN* и *ABC* подобны.

б) Найдите отношение площадей треугольника *MBN* и трапеции *AMNC*.

17. 12 ноября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк *X* рублей. Какой должна быть сумма *X*, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{5}{x}-3\right| = 2ax-2$ имеет на промежутке $(0;+\infty)$ единственный корень.

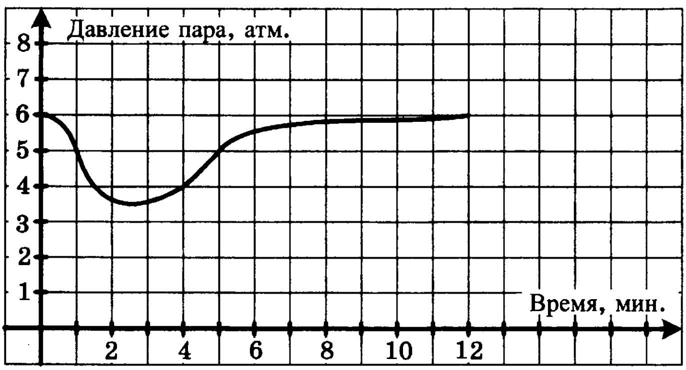
19. Докажите, что уравнение $x^2 + 2 = 5y$ не имеет решений в целых числах.

Вариант 3

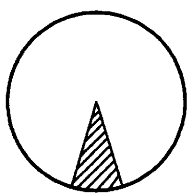
Часть 1

1. Цена на пылесос была повышена на 14% и составила 12 768 рублей. Сколько рублей стоил пылесос до повышения цены?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 5 атмосфер.



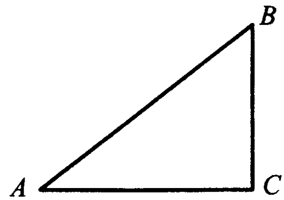
3. Найдите площадь сектора круга радиуса $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, центральный угол которого равен 36°.



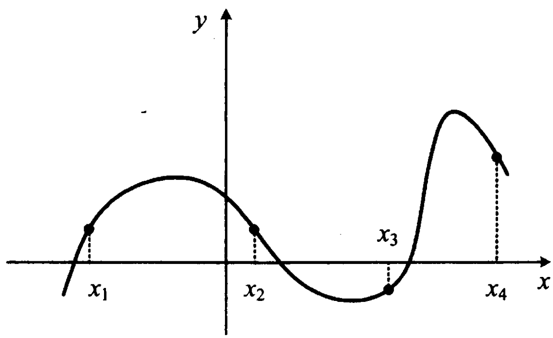
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $\log_2(x-4)=3$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, $AB=\sqrt{74}$, $\sin A=\frac{5}{\sqrt{74}}$. Найдите AC.



7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3 и x_4 те, в которых производная функции $y=f(x)$ положительна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 30. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 10.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}\right)^{30}}{90}$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ)=l_0(1+\alpha\cdot t^\circ)$, где $\alpha=1,2\cdot10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11. Из двух поселков, расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу вышли два пешехода. Через сколько часов они встретятся, если их скорости равны 3,5 км/ч и 4,5 км/ч?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=27x-13\sin x+11$ на отрезке $[-4\pi; 0]$.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.

14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и CA_1.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_x(x-3)}{\log_{x^2}(5-x)-1}\geq0.$

16. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC.

б) Найдите площадь ΔABC, если радиус окружности равен 4, а $AC\cdot AB=30$.

17. 17 декабря 2014 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x + y + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4x + y^2 + 4y \leq a^2 - 8 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

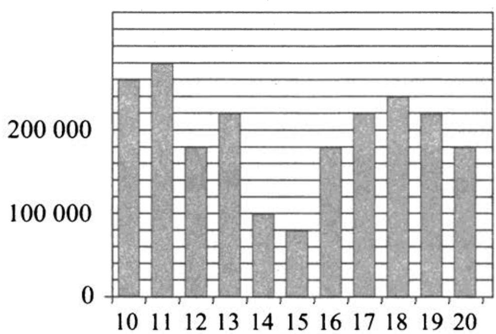
19. Решите уравнение $4^{xy} = 2^{2014}$ в целых числах.

Вариант 4

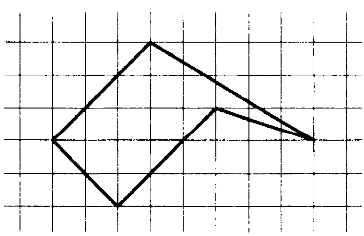
Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13%. Сколько рублей составляет заработная плата Андрея Петровича, если после удержания налога он получил 19 140 рублей?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ во все дни с 10 сентября по 20 сентября 2013 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ за данный день. Определите по диаграмме во сколько раз наибольшее количество посетителей данного сайта за день больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



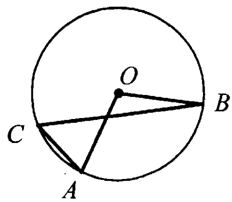
3. Найдите площадь пятиугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



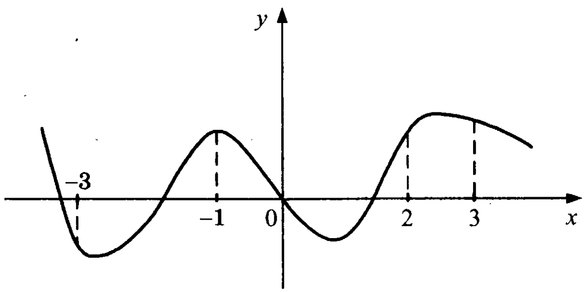
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы 1 раз.

5. Решите уравнение $-2\frac{1}{4}x = -\frac{18}{5}$.

6. Центральный угол на 62° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –3, –1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8. Объем цилиндра равен π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2^{3-7\sqrt{2}} \cdot 8^{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$.

10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 16 А. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

11. 3 килограмма яблок стоят столько же, сколько 4 килограмма бананов. На сколько процентов 10 килограммов бананов дешевле 10 килограммов яблок?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-11)e^{x-10}$ на отрезке [9; 14].

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1

а) Постройте угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

б) Найдите косинус этого угла.

15. Решите неравенство: $\dfrac{3^{x^2-1}+3^{x^2-2}+3^{x^2-3}}{x} \le 1\dfrac{12}{27}\left(\sqrt{x}\right)^{-2}$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 3$; $AC = 5$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases} \log_a(2x+y+1)=-x-4y-6 \\ x-3y=5 \end{cases}$ имеет единственное решение?

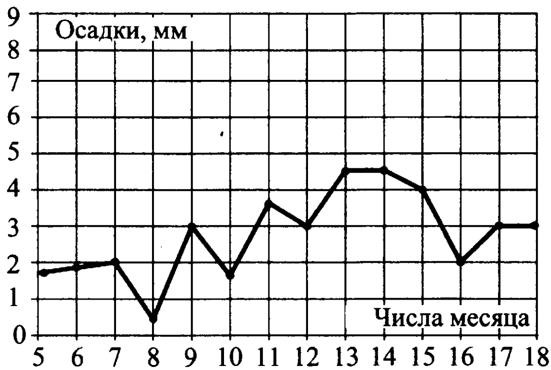
19. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $2014!=1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,2013\cdot 2014$ не делится на n^{n^2}.

Вариант 5

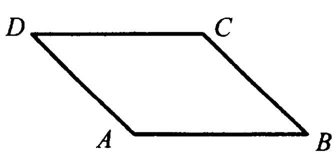
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2013 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.



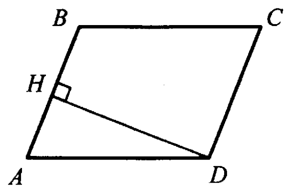
3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150°.



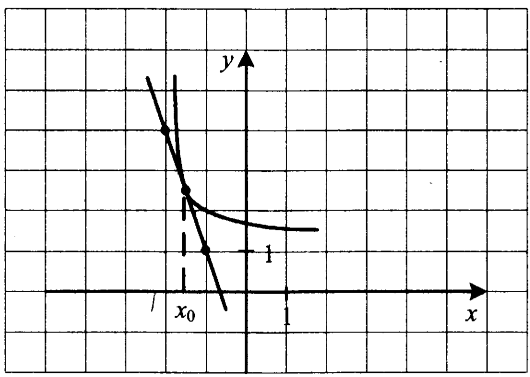
4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^{x}$.

6. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 12, $AD = 13$. Найдите $13\sin B$.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением

$a = 6$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7\ln(x+5) + 3{,}8$ на отрезке $[-4{,}9;\ 0]$.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 5\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

15. Решите неравенство: $\sqrt{4-x^2}\left(4+5x+x^2\right) \geq 0$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$

содержит ровно два целых числа.

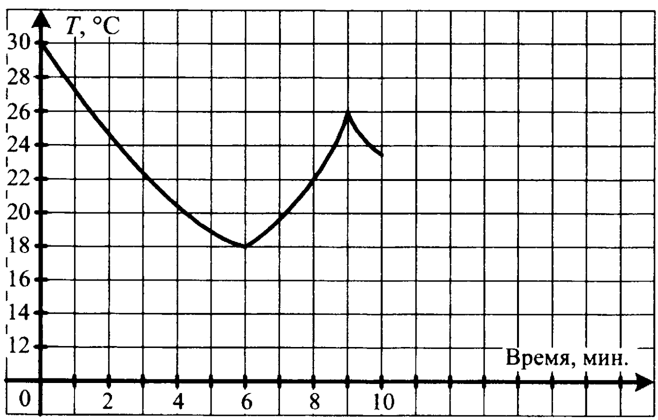
19. Решите уравнение $x^2+3=7y$ в целых числах.

Вариант 6

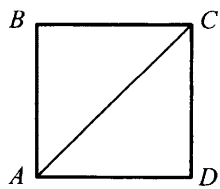
Часть 1

1. Магазин закупает учебники по оптовой цене 80 рублей за штуку и продает с наценкой 70%. Какое наибольшее число учебников можно купить в этом магазине на 500 рублей?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



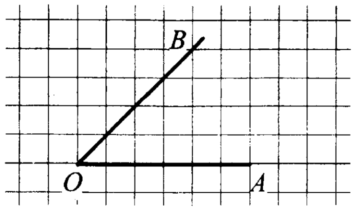
3. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 8.



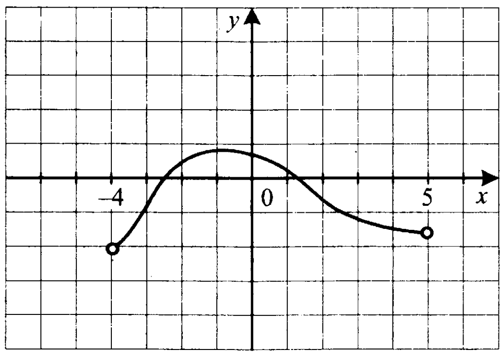
4. Игральный кубик бросают трижды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию А = {сумма очков не более 6}?

5. Решите уравнение $\log_7(1-2x)=\log_7 13$.

6. Найдите синус угла AOB. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $17\sqrt{2}$.



7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–4; 5). Найдите количество точек экстремума функции $y=f(x)$.



8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ $AB = 2$ см, $AA_1 = 5$ см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-10a+25}$ при $a\in[3;4]$.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением

$a = 4$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 32 метра. Ответ выразите в секундах.

11. Заказ в 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 3 детали меньше?

12. Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 3x^3 + 4x$ на отрезке $[-3; -1]$.

13. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 - \operatorname{ctg} x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13.

а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы.

б) Найдите величину этого угла.

15. Решите неравенство: $\log_2 (x-3)^2 + \log_{0,5} (x^2 - 9) < 1$.

16. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC.

б) Найдите площадь ΔABC, если радиус окружности равен 8, а $AC \cdot AB = 120$.

17. 18 декабря 2014 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором решение неравенства $\left|\left|\left|\left|31x-147\right|+157\right|-167\right|+177\right|-187 \le 93k^4$ удовлетворяет условию $x \in [-190; 200]$.

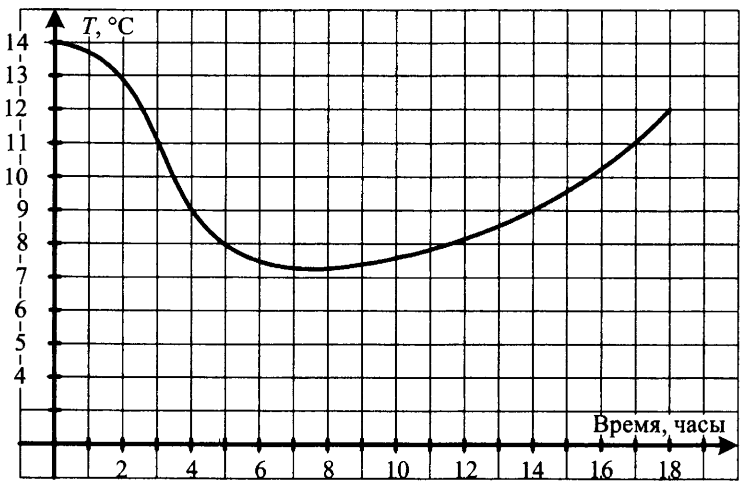
19. Решите уравнение $mn^2+46=11m$ в натуральных числах.

Вариант 7

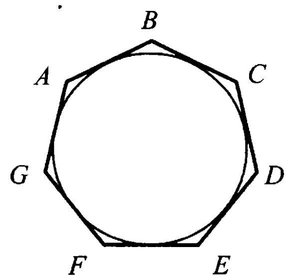
Часть 1

1. В городе N живет 100 000 жителей. Среди них — 30% детей и подростков. Среди взрослых 70% работают. Сколько взрослых не работает?

2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. Сколько часов температура была ниже 9 градусов?



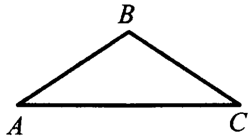
3. Найдите площадь семиугольника, если его периметр равен 20, а радиус вписанной в этот семиугольник окружности, равен 2.



4. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится нацело на 195? Ответ округлите до тысячных.

5. Решите уравнение $4x^2 = 256$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6. Один из углов равнобедренного треугольника равен 176°. Найдите один из двух других его углов. Ответ дайте в градусах.



7. Прямая $y = 2x - 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности куба.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{18}{3^{\log_3 6}}$.

10. При температуре 0 °С рельс имеет длину l_0 = 8 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11. Андрей при подготовке к ЕГЭ поставил себе задачу — решать каждый день на 5 задач больше, чем в предыдущий. За первый день он решил 7 задач, а за последний — 37 задач. Сколько задач он решил всего?

12. Найдите наименьшее значение функции $e^{4x} - 5e^{2x} + 11$ на отрезке [0; 2].

13. а) Решите уравнение $3^x + 2 \cdot 3^{-x-2} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5{,}5; -1]$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, $\text{tg}A = 0{,}5$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью ACC_1.

15. Решите неравенство: $\sqrt{25 - x^2}\log_{x+5} 2 \le 0$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке L. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BL пересекает первую окружность в точке D, прямая AL пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ALB , если известно, что радиусы окружностей равны 8 и 2.

17. 12 октября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 456 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 октября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\left(a - a^{\log_{\sqrt{a}}\sqrt{x}}\right)\left(a + a^{\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[3]{x}}\right)\right)^{0,5}$ содержит лишь одно целое число.

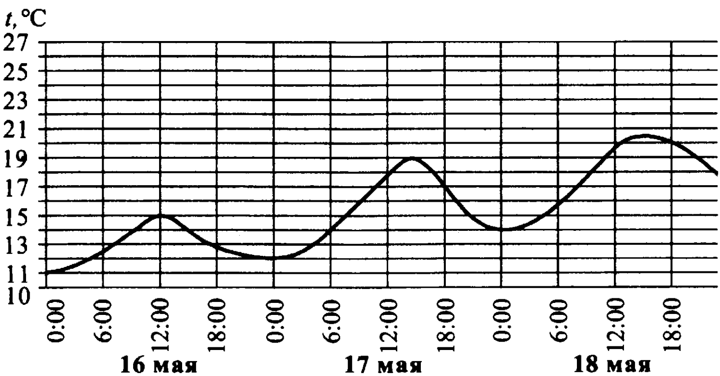
19. Докажите, что уравнение $3x^2 + 3 = 7y$ не имеет решений в целых числах.

Вариант 8

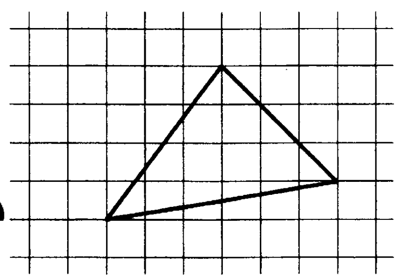
Часть 1

1. ЕГЭ по математике выше 80 баллов в городе N написало 14 выпускников, что составило 7% от общего числа выпускников. Сколько всего выпускников в городе N?

2. На рисунке показано изменение воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



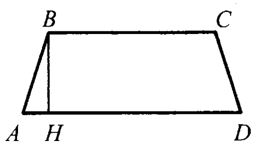
3. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4. Вероятность того, что Андрей сдаст ЕГЭ по математике, равна 0,99, а вероятность того, что он сдаст ЕГЭ по русскому языку, равна 0,98. Найдите вероятность того, что Андрей сдаст оба эти экзамена.

5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} = 64$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 114 и 186. Высота трапеции равна 45. Найдите котангенс острого угла трапеции.



7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - 13t + 37$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах (измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

8. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите сторону куба.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2}{25}$.

10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает $8A$. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите наибольшее значение функции $\log_9(2-x^2+2x)+4$.

13. а) Решите уравнение $7^{\sin 3x}\cdot 3^{2\sin 3x}=63^{\cos 3x}$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В шаре проведено два сечения параллельными плоскостями, причем одно из них проходит через центр шара. Расстояние между плоскостями равно 3, а площадь меньшего сечения равна 16π. Найдите площадь поверхности шара.

15. Решите неравенство: $\log_3(x-1)^{36}+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-24}<12.$

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD=r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N. Найдите площадь треугольника BMN, если известно, что $r=1$ и $CD=3$.

17. 17 апреля 2015 года Анна взяла в банке 1 856 400 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. При каких положительных значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} a^{2x-y-4}=x-4y+1 \\ x+3y-5=0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения?

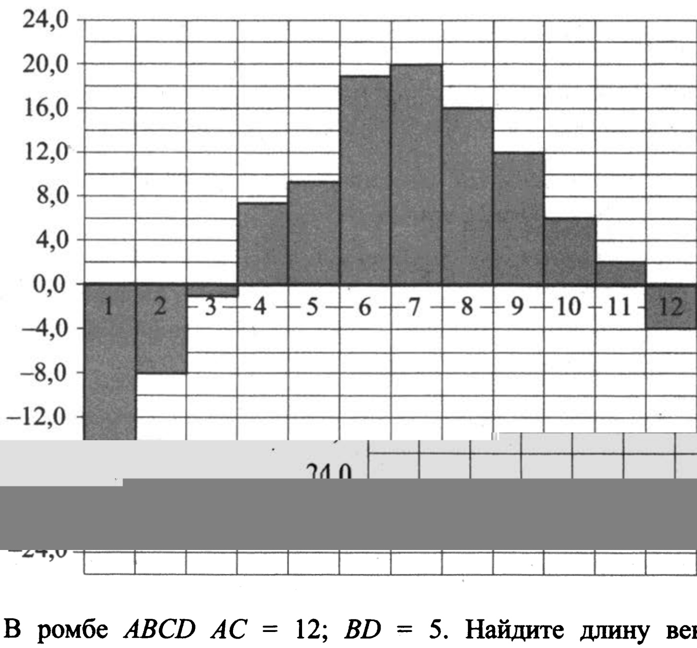
19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2014!=1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ 2013\cdot 2014$ не делится на n^{n^5}.

Вариант 9

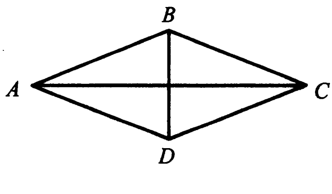
Часть 1

1. Цена на телевизор была повышена на 3% и составила 15 450 рублей. Сколько рублей стоил телевизор до повышения цены?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура в Санкт-Петербурге за все месяцы 2013 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 15 градусов Цельсия.



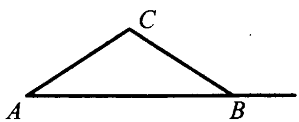
3. В ромбе $ABCD$ $AC = 12$; $BD = 5$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$.



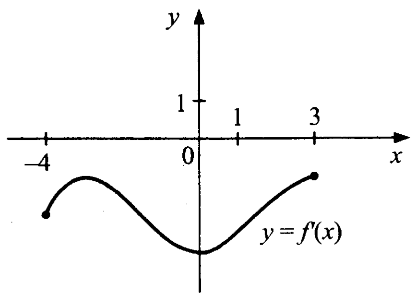
4. В сборнике билетов по геометрии всего 64 билета, в 16 из них встречается вопрос по теме «Треугольники». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Треугольники».

5. Решите уравнение $3^{5x-1} = 27$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.



7. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке [–4; 3]. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. В какой точке отрезка функция принимает наименьшее значение?



8. Высота конуса равна 12, а длина образующей — 15. Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 74}{\log_{27} 74}$.

10. Камень брошен вниз с высоты 4 м. Высота h (в метрах), на которой находится камень во время падения, зависит от времени t (в секундах): $h(t) = 4 - 3t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист и одновременно из B в A выехал автомобилист. Мотоциклист прибыл в B через 2 часа после встречи, а автомобилист в A через 30 минут после встречи. Сколько часов был в пути мотоциклист?

12. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 6x + 194$.

13. а) Решите уравнение $2\sin^2 x = \sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ со стороной основания 2 и боковым ребром 3 точка M делит ребро SD в отношении $1 : 2$ (считая от вершины S).

а) Постройте угол между прямой BM и плоскостью AEC.

б) Найдите величину этого угла.

15. Решите неравенство: $\dfrac{x^2 - 1{,}5x - 1}{\log_{\sqrt{2}} |x|} < 0.$

16. Две окружности касаются внешним образом в точке L. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BL пересекает первую окружность в точке D, прямая AL пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ALB, если известно, что радиусы окружностей равны 1,25 и 5.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Иванович взял в банке 1,5 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Иванович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Иванович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 375 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при которых областью определения функции $y = \dfrac{1}{2^{2x} - 2^{x} - a}$ является вся числовая прямая.

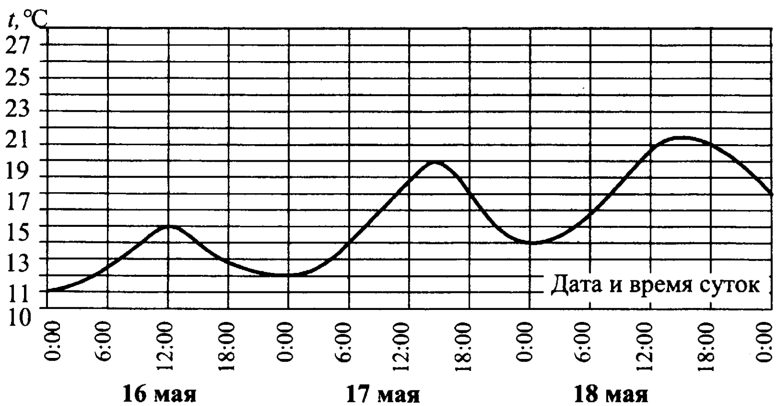
19. Решите уравнение $x^2 + 2 = 3y$ в целых числах.

Вариант 10

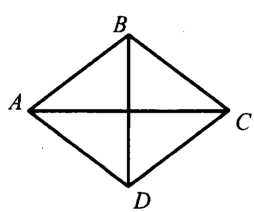
Часть 1

1. Пакет молока стоит 50 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 4%. Сколько рублей заплатит пенсионер за пакет молока?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разницу между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



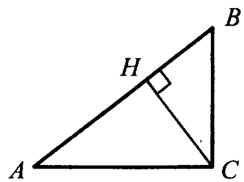
3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 8.



4. Вероятность того, что новый телевизор прослужит больше 5 лет, равна 0,92. Вероятность того, что он прослужит больше 10 лет, равна 0,39. Найдите вероятность того, что он прослужит больше 5 лет, но меньше 10.

5. Решите уравнение $\sqrt{2x-3}=13$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C CH — высота, $\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $AC=4$. Найдите $2\sqrt{5}\,AH$.



7. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции x^2-2x-c. Найдите c.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$, $AD=\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+1$.

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину поезда (в метрах).

12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+576}{x}$.

13. а) Решите уравнение $\log_{2014}(\sin x + \sqrt{3}\cos x + 2014) = 1$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $AB\ldots E_1F_1$ со стороной основания 4 и боковым ребром 2.

а) Опустите перпендикуляр из точки C на прямую E_1F_1.

б) Найдите его длину.

15. Решите неравенство: $\log_2^2\left(x^2 - 24\right) > 0$.

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $AMNC$, если известно, что $r = 2$ и $CD = 6$.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 20% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 300 тысяч рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y = \log_2(\log_2(a - x))\cdot\log_2 x$ содержит ровно пять целых чисел.

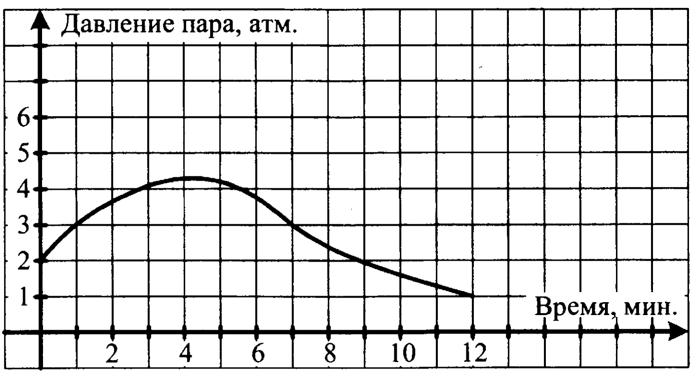
19. Решите уравнение $3^m + 4^n = 73$ в натуральных числах.

Вариант 11

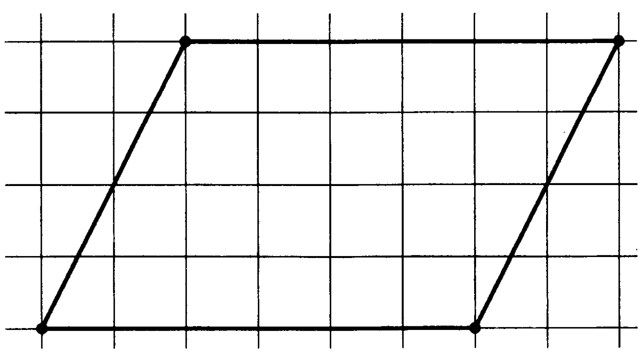
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было больше 3 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

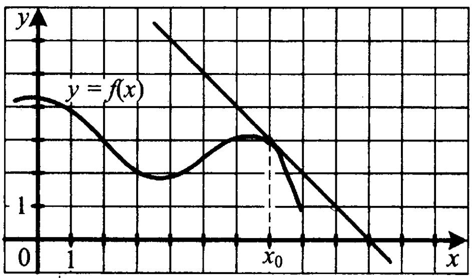


4. Из слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна буква. Найдите вероятность того, что эта буква окажется согласной.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+1}=1$.

6. В треугольнике ABC угол B равен 90°, $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = 3$. Найдите AC.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5. Найдите площадь полной поверхности куба.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_9 16}-2$.

10. Камень брошен вниз с высоты 21 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t)=21-4t-t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

12. Найдите точку минимума функции $y=(x+5)e^{x-5}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \\ 3\sin x + 7y = 4 \end{cases}$.

14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 45°.

15. Решите неравенство:

$$\frac{\log^2_{2x-1}(3x-2) - \log_{2x-1}(9x^2-12x+4) - 7}{1 - 2\log_{2x-1}(6x^2-7x+2)} \le 3.$$

16. Окружность касается одной стороны прямого угла с вершиной A и пересекает его вторую сторону в точках B и C. Найдите радиус окружности, если $AB = 4$, $AC = 8$.

17. 12 ноября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите наибольшее натуральное значение параметра a, при котором решение неравенства $\left||7x+52|-23\right|-121 \le 14a^2$ удовлетворяет условию $x \in [-46; 50]$.

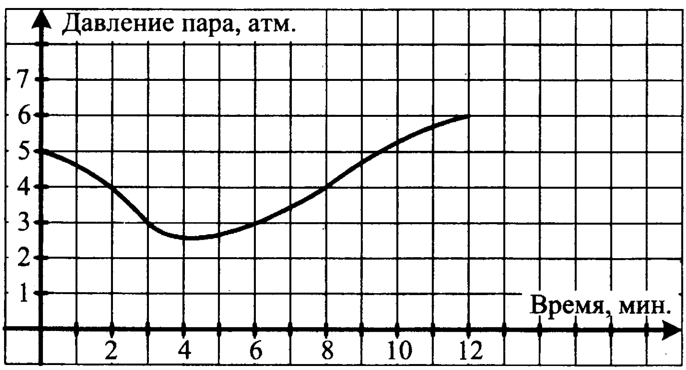
19. Решите уравнение в натуральных числах $mn^2 + 46 = 11m$.

Вариант 12

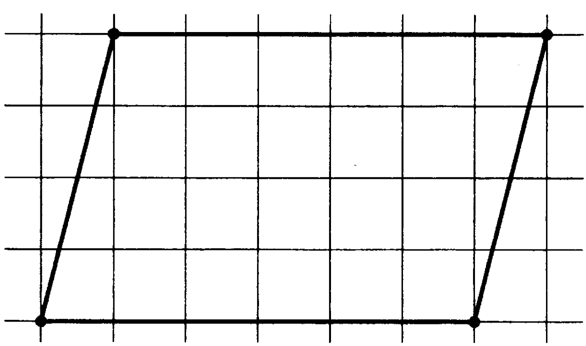
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 150 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 4 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

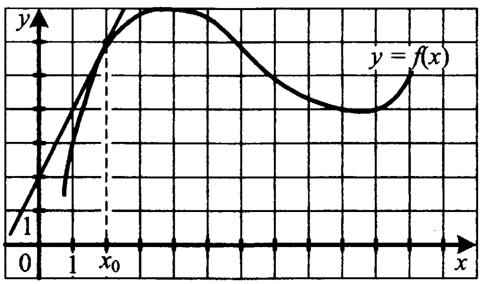


4. Из слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна буква. Найдите вероятность того, что эта буква окажется гласной.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-3}=5$.

6. В треугольнике BCD угол C равен 90°, $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $BC=3$. Найдите BD.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 3. Найдите площадь полной поверхности куба.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $2^{\log_4 49}-3$.

10. Камень брошен вниз с высоты 18 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t)=18-3t-t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Моторная лодка прошла против течения 48 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 8 часов меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y=(2x+1)e^{1-x}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \\ 8\sin x + 5y = 14 \end{cases}$.

14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна $\sqrt{3}$, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 30°.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{16} 4x^2 - \log_{\sqrt{2x}} \dfrac{x}{2}}{4\log_{16}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)+1} > \log_{\left(2-\frac{2}{3}x\right)} x$.

16. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу точкой касания в отношении 3 : 2. Найдите площадь треугольника, если гипотенуза равна 15.

17. 12 ноября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором решение неравенства $||5x+64|+117|-28 \le 15a^3$ удовлетворяет условию $x \in [-19; 10]$.

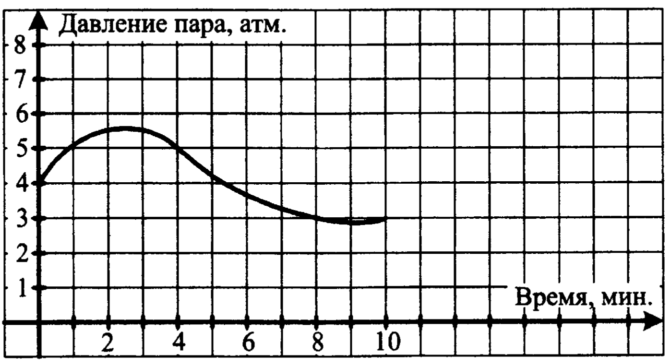
19. Решите уравнение в натуральных числах $mn^2 + 40 = 9m$.

Вариант 13

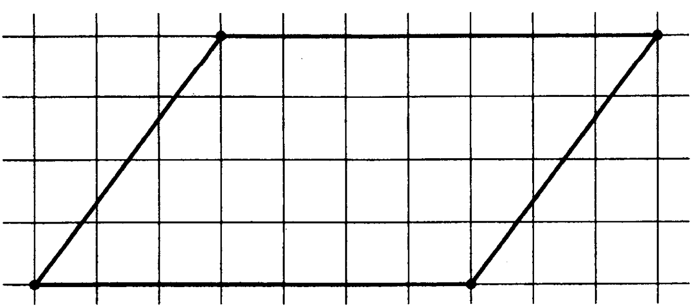
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 300 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 10%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было больше 5 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

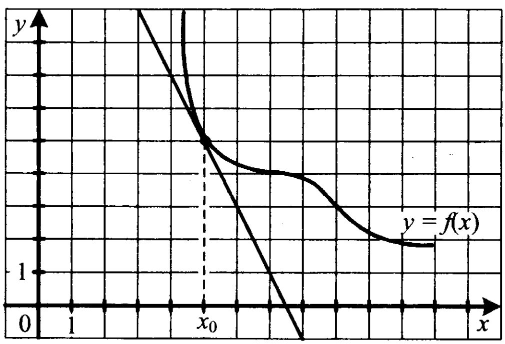


4. Из слова «АЛГЕБРА» случайным образом выбирается одна буква. Найдите вероятность того, что эта буква окажется согласной. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-1}=3$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $BC=\sqrt{7}$. Найдите AB.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Диаметр основания конуса равен 10, а его высота равна 12. Найдите длину образующей конуса.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_{27}8}+1$.

10. Камень брошен вниз с высоты 10 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t)=10-9t-t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Моторная лодка прошла против течения 70 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+3) - 2x + 43.$$

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \\ 2\cos x - 7y = 9 \end{cases}$.

14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 5, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

15. Решите неравенство: $\dfrac{1 - \log_2(2x^2 - 9x + 9)}{\log_3(x+8)} \geq 0$.

16. Из точки M к окружности с центром O проведены прямая MO и касательная MA (A — точка касания). Из точки A к прямой MO проведен перпендикуляр AB. Найдите расстояние от точки M до центра, если $AM = 40$ и $AB = 24$.

17. 17 декабря 2014 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором решение неравенства $||4x+19| - 83| - 97 \leq 8a^4$ удовлетворяет условию $x \in [-212; 212]$.

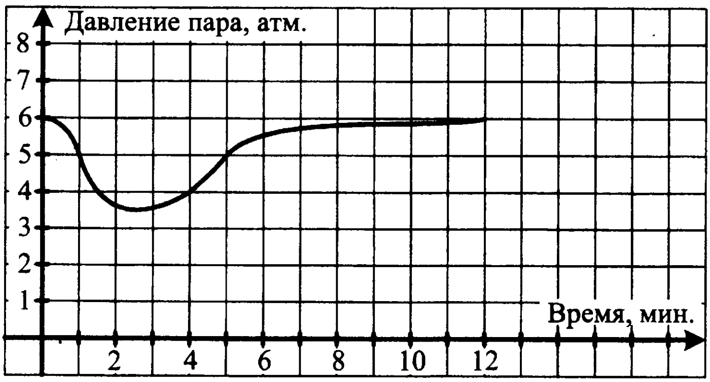
19. Решите уравнение в натуральных числах $mn^2 + 44 = 5m$.

Вариант 14

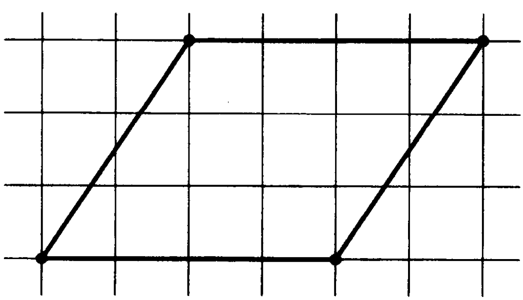
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 100 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 600 рублей после повышения цены билета на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 5 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

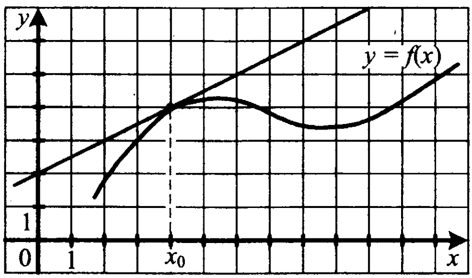


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до десятых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-8} = 2$.

6. В треугольнике ABD угол D равен 90°, $\sin B = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $BD = 6$. Найдите AB.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Диаметр основания конуса равен 8, а его высота равна 3. Найдите длину образующей конуса.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $4^{\log_{16} 9} + 2$.

10. Камень брошен вниз с высоты 11 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t) = 11 - 10t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Моторная лодка прошла против течения 112 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+1) - 4x + 11.$$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 11\sin x + 5 = 0 \\ 4\sin x + y = 3 \end{cases}.$$

14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_2(3x-1)}{\log_3(2x+1)} \le 0$.

16. Через точку окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной 16 и 12. Найдите расстояние между серединами хорд.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра l, при котором решение неравенства $\left|\left||3x+32|-17\right|-19\right|-87 \le 6l^2$ удовлетворяет условию $x \in [-84; 65]$.

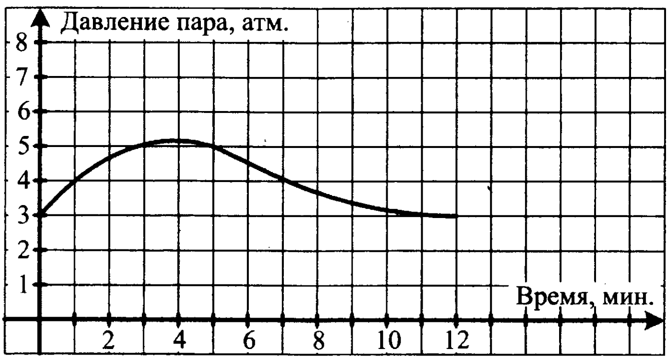
19. Решите уравнение в натуральных числах $mn^2 + 48 = 12m$.

Вариант 15

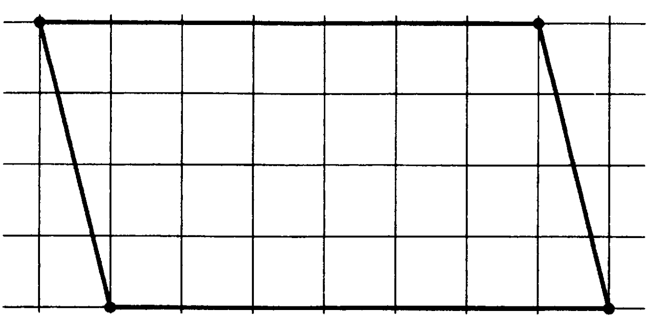
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 230 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 800 рублей после повышения цены билета на 10%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было больше 4 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

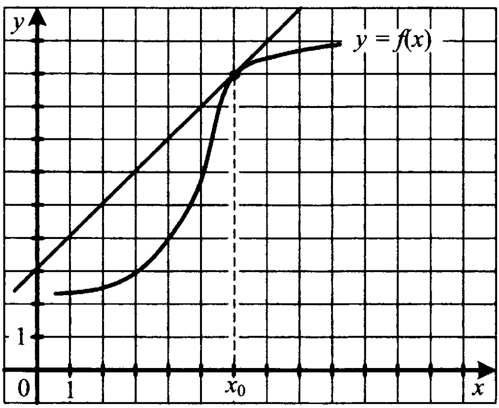


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{3-2x}=5$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\sin C=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$, $AC=5$. Найдите BC.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2. Найдите сторону куба.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $2^{\log_4 81}-3^{\log_9 16}$.

10. Камень брошен вниз с высоты 15 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t)=15-2t-t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Моторная лодка прошла против течения 84 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\sqrt{3}\cos x + 3x - \pi .$$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \\ 8\cos x - 2y = 3 \end{cases}.$$

14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 3, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

15. Решите неравенство: $\dfrac{1 - 2\sqrt{\log_2 x - \log_2^2 x}}{2\log_2 x - 1} < 1$.

16. Две равные параллельные хорды окружности отсекают от нее дуги в 90°. Длина одной из хорд равна 8. Найдите расстояние между хордами.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра l, при котором решение неравенства $\left|\left||15x + 53| + 18\right| - 27\right| - 64 \le 30l^2$ удовлетворяет условию $x \in [-176; 154]$.

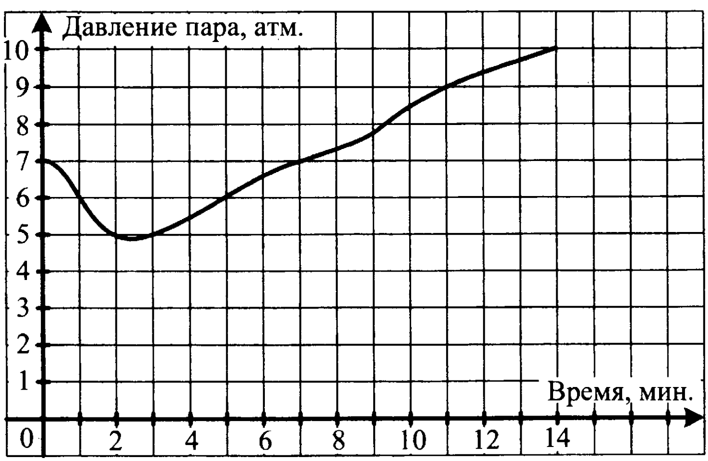
19. Решите уравнение в натуральных числах $mn^2 + 36 = 18m$.

Вариант 16

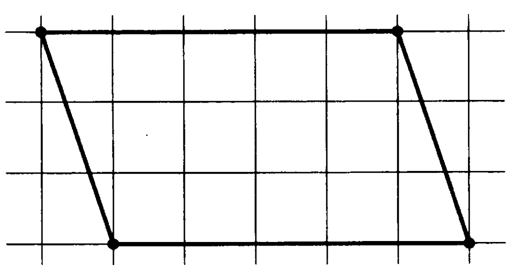
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 500 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 2000 рублей после понижения цены билета на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 6 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

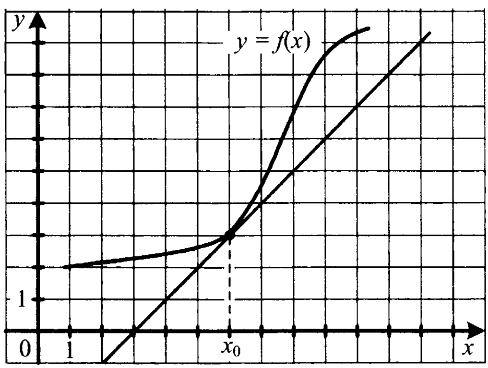


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+18}=9$.

6. В треугольнике ABC угол B равен 90°, $\cos A=\frac{3}{5}$, BC = 4. Найдите AC.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь полной поверхности куба равна 6 см^2. Найдите сторону куба.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $11^{\log_{11\sqrt{11}} 125-\log_{121} 9}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+4t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 3 метров.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2,5\cos x - 3x + 2$ на отрезке $[-\pi, 0]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 y - 11\sin y + 5 = 0 \\ 3\cos x + 2\sin y = 4 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

15. Решите неравенство: $4\log_{16}\dfrac{x^3}{3x+1} + 3\log_8\dfrac{3x+1}{x} < 1$.

16. Через середину радиуса окружности проведена перпендикулярная ему хорда. Найдите градусную меру меньшей из дуг, на которые окружность делится проведенной хордой.

17. 18 декабря 2014 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра l, при котором решение неравенства $\left|\left||19x + 79| + 53\right| + 11\right| - 243 \le 57l^4$ удовлетворяет условию $x \in [-260; 300]$.

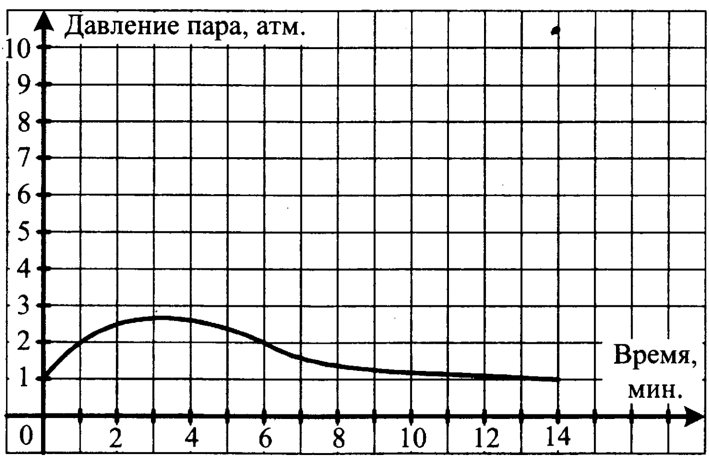
19. Решите уравнение в натуральных числах $2^m + 2^n = 12$.

Вариант 17

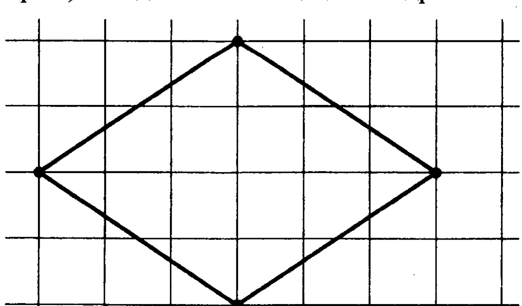
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 400 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 2000 рублей после понижения цены билета на 15%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было больше 2 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

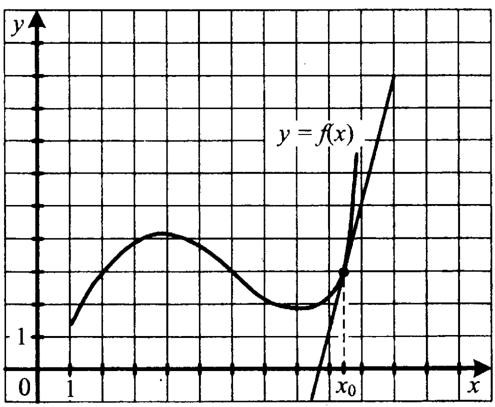


4. На научной конференции будут выступать 3 докладчика из Германии, 2 — из России и 5 — из Японии. Найдите вероятность того, что последним будет выступать докладчик из России, если порядок выступления определяется жребием.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+10}=5$.

6. В треугольнике BCD угол B равен 90°, $\cos D=\frac{2}{3}$, $BC=\sqrt{5}$. Найдите CD.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2^{\log_{17}375\cdot\log_5 17-\log_5 3}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+3t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 2 метров.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{\pi}{2}\sin x-\sqrt{5}x+1$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\cos^2 x+5\cos x+2=0\\ \cos x+\sin y=-1\end{cases}$.

14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объем пирамиды.

15. Решите неравенство:

$$2\log_9(x^2+4x+3)-\log_{27}(x+1)^3<\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}.$$

16. Основание равнобедренного треугольника вдвое меньше его боковой стороны, а высота, проведенная к основанию, равна 10. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

17. 12 октября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 456 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 октября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором решение неравенства $\left|\left|\left||29x-1|+121\right|-17\right|+8\right|-222\le 58k^2$ удовлетворяет условию $x\in[-102;\ 117]$.

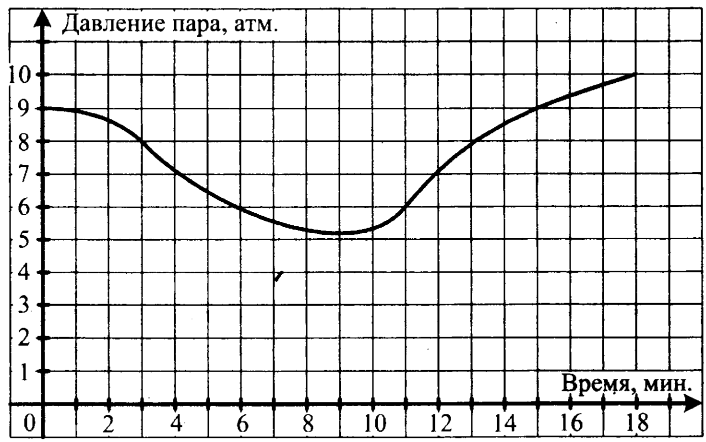
19. Решите уравнение в натуральных числах $2^m+3^n=13$.

Вариант 18

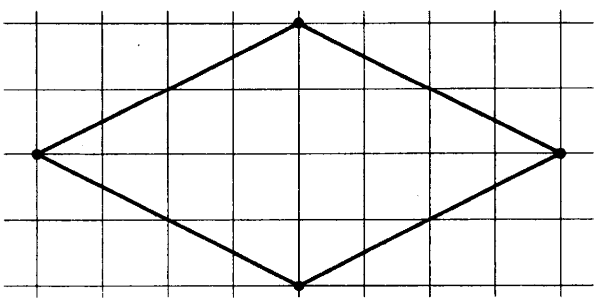
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 1000 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 5000 рублей после понижения цены билета на 15%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 8 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

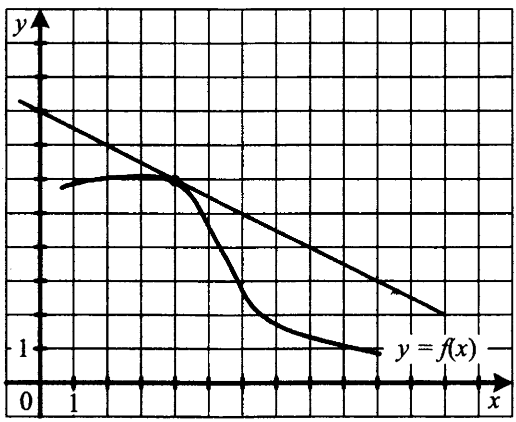


4. Одновременно бросают две монеты. Найдите вероятность того, что на обеих монетах выпадет орел.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-11}=7$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B=\frac{2}{7}$, $AC=3\sqrt{5}$. Найдите AB.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $13^{\ln 400 \cdot \lg e - 2\lg 2}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+5t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 6 метров.

11. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа, а второй трубой — за 3 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 6 часов. За сколько часов заполнится изначально пустой бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{7}{\pi}x - \frac{4}{3}\cos x - 3$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0 \\ \cos y + 3\sin x = 4 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 3, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

15. Решите неравенство:

$$\log_{0,125}(x+5)^3 < 2\log_{0,25}(x^2+5x+4).$$

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его боковых сторон в точках M и N. Точка M делит сторону на отрезки 18 и 12, считая от основания треугольника. Найдите MN.

17. 17 апреля 2015 года Анна взяла в банке 1 856 400 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором решение неравенства $\left|\left|\left||31x-147|+157\right|-167\right|+177\right|-187 \le 93k^4$ удовлетворяет условию $x \in [-190; 200]$.

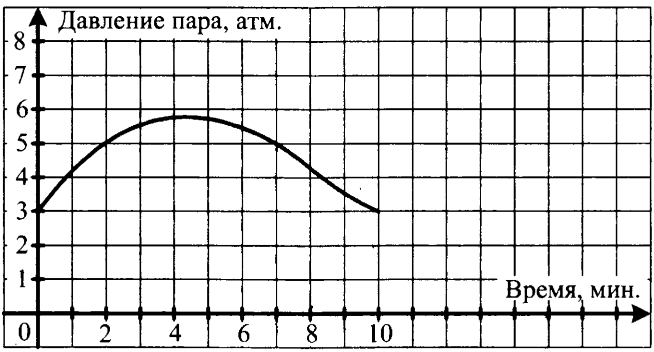
19. Решите уравнение в натуральных числах $3^m + 2^n = 19$.

Вариант 19

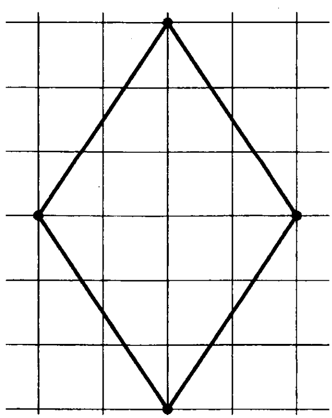
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 800 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 5000 рублей после понижения цены билета на 15%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было больше 5 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

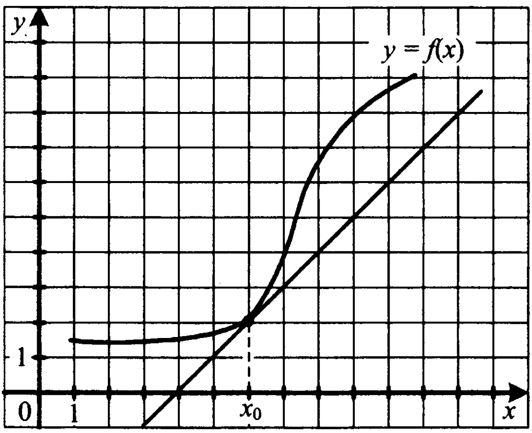


4. Одновременно бросают две монеты. Найдите вероятность того, что на обеих монетах выпадет решка.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{8x+5}=11$.

6. В треугольнике ABD угол A равен 90°, $\cos B=\frac{4}{5}$, $AD = 3$. Найдите BD.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, а его высота равна 1. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $2^{\log_2 7}+25^{\log_5 \sqrt{13}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+6t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 8 метров.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)e^{x-2}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos^2 x - 7\cos x + 6 = 0 \\ \sin y + 3\cos x = 4 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 30°. Найдите объем пирамиды.

15. Решите неравенство:

$$\log_{\sqrt{3}}(4-x) - \log_{27} x^3 + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < 1.$$

16. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, и боковой стороны делит эту сторону на отрезки 12 и 3, считая от основания треугольника. Найдите радиус окружности.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Иванович взял в банке 1,5 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Иванович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Иванович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 375 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\left(a - a^{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}}\right)\left(a + a^{\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{x}}\right)\right)^{0,5}$ содержит лишь одно целое число.

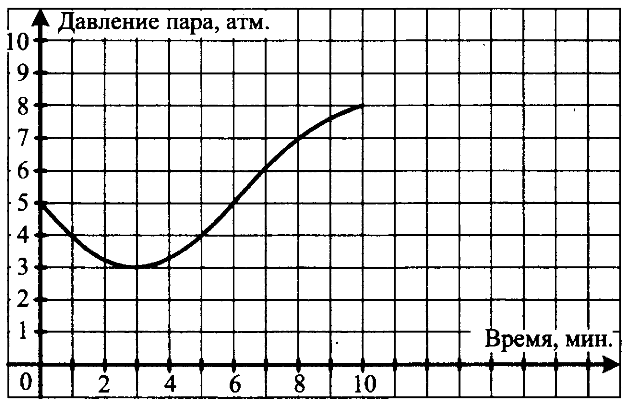
19. Решите уравнение в натуральных числах $3^m + 4^n = 73$.

Вариант 20

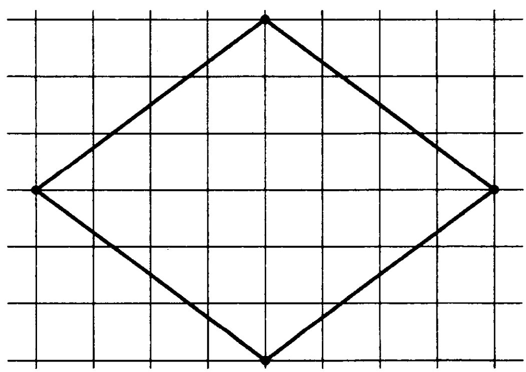
Часть 1

1. Билет на поезд стоит 260 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 1000 рублей после понижения цены билета на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 4 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

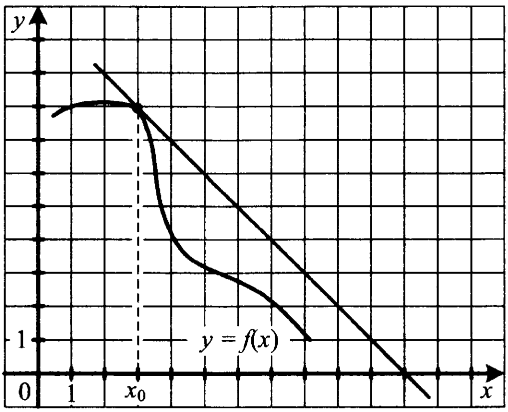


4. Одновременно бросают две монеты. Найдите вероятность того, что на одной монете выпадет орел, а на другой – решка.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{4x-3}=15$.

6. В треугольнике BCF угол F равен 90°, $\cos B=\frac{5}{7}$, $FC=2\sqrt{6}$. Найдите BC.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 4π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $5^{\log_5 3+49^{\log_7 \sqrt{11}}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+7t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 10 метров.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 45 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 55 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{\pi}{3}x-\cos x-3$ на отрезке $[0,\pi]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\sin^2 x+7\sin x-4=0\\ 2\sin x+3\cos y=1\end{cases}$.

14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

15. Решите неравенство:

$$\frac{2\log_{49}x-\log_{27}x^3\cdot\log_3 7}{\log_3 7-\log_7 3}>2\log_4 0,25.$$

16. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и катета делит этот катет на отрезки 3 и 4, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 20% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 300 тысяч рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y=\log_2(\log_2(a-x))\cdot\log_2 x$ содержит ровно пять целых чисел.

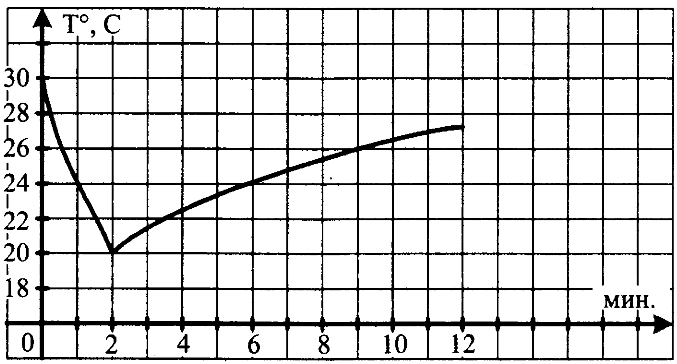
19. Решите уравнение в натуральных числах $2^m+5^n=141$.

Вариант 21

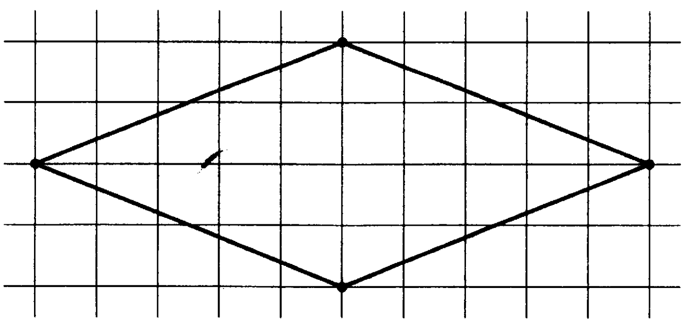
Часть 1

1. Килограмм яблок стоит 80 рублей. Сколько рублей сдачи вы получите с 1000 рублей при покупке 1 кг 500 г яблок?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

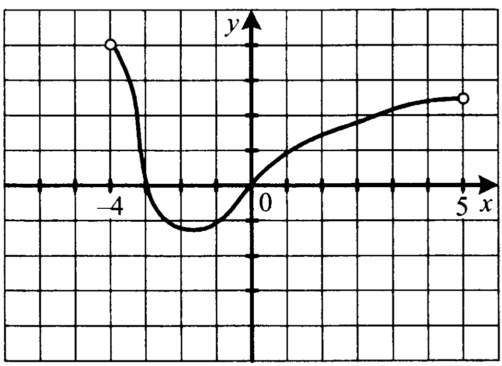


4. Доля брака при производстве часов составляет 0,4%. Найдите вероятность того, что только что купленные часы окажутся исправными.

5. Найдите корень уравнения $\log_2(x+1)=4$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — перпендикуляр к AB, $\sin A = \frac{3}{5}$, $BC = 15$. Найдите CH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (–4; 5). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=5$, $AD=\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{5}{3^{\log_3 5}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+8t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 12 метров.

11. Бригада рабочих должна изготовить 200 деталей. Изготавливая ежедневно на 5 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на два дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[-2; 2]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x = 4^y \\ 4\cos^2 x - 3 = 0 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, а диагональ боковой грани равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство: $\frac{x^2 + 2x - 3}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x)} < 0$.

16. В треугольнике ABC $AB = BC = 30$. Вписанная в треугольник окружность касается стороны AB в точке M, и $AM = 18$. Найдите радиус окружности.

17. 15 декабря 2014 года Андрей взял в банке 108 500 рублей в кредит под 17% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 15 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \sqrt{a - x}\log_2(2x - a)\cdot\log_2 x$ содержит три или четыре целых числа.

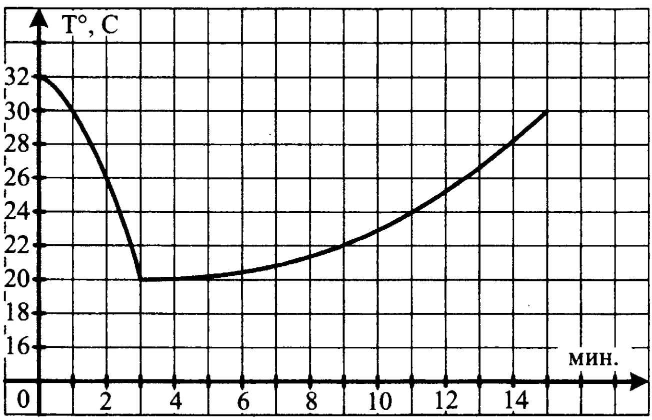
19. Решите уравнение в целых числах $mn^2 + 15 = 4m$.

Вариант 22

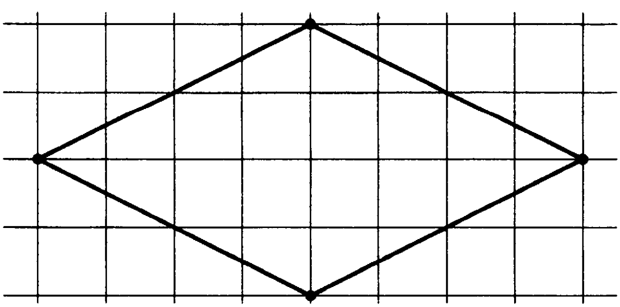
Часть 1

1. Килограмм черешни стоит 60 рублей. Сколько рублей сдачи вы получите с 1000 рублей при покупке 2 кг 400 г черешни?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

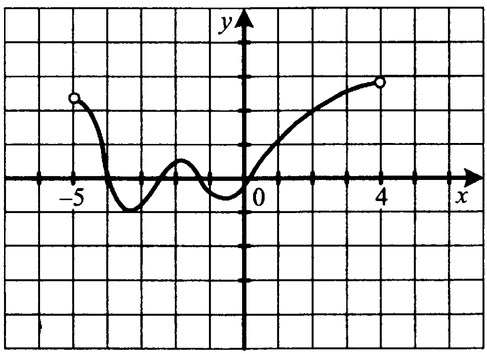


4. Из класса, в котором учатся 12 мальчиков и 8 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Найдите вероятность того, что дежурным окажется мальчик.

5. Найдите корень уравнения $\log_2(2x-4)=3$.

6. В треугольнике ABD угол B равен 90°, BH — перпендикуляр к AD, $\sin D=\frac{4}{7}$, $AB=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Найдите BH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–5; 4). Найдите количество точек экстремума функции $y=f(x)$.



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=7$, $A_1D_1=\sqrt{31}$, $AA_1=1$. Найдите длину диагонали параллелепипеда DB_1.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{7}{2^{\log_2 7}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+7t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 12 метров.

11. Бригада рабочих должна изготовить 150 деталей. Изготавливая ежедневно на 20 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на два дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-3; 1]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x = 9^y \\ 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{13}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство: $(4x^2 - 6x + 2)\log_{\sqrt{2}} 8x^3 \geq 0$.

16. В прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$ вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает катет BC в точке T, $CT = 2\sqrt{3}$, $\angle TAC = \angle B$. Найдите гипотенузу AB.

17. 12 ноября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых областью определения функции $y = \dfrac{1}{a \cdot 2^{2x} - 2^x + 1}$ является вся числовая прямая.

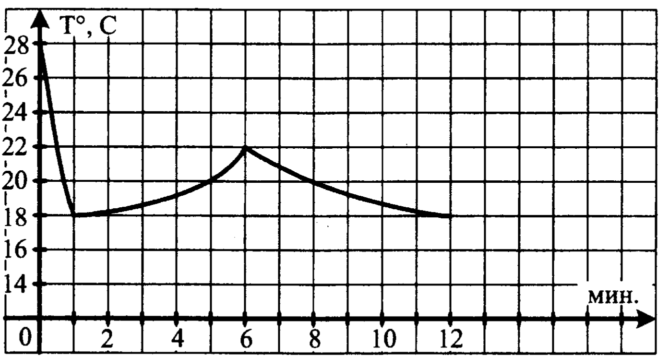
19. Решите уравнение в целых числах $mn^2 + 20 = 4m$.

Вариант 23

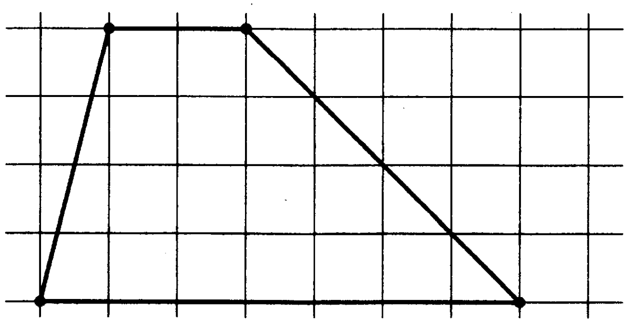
Часть 1

1. Килограмм слив стоит 50 рублей. Сколько рублей сдачи вы получите с 500 рублей при покупке 1 кг 200 г слив?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

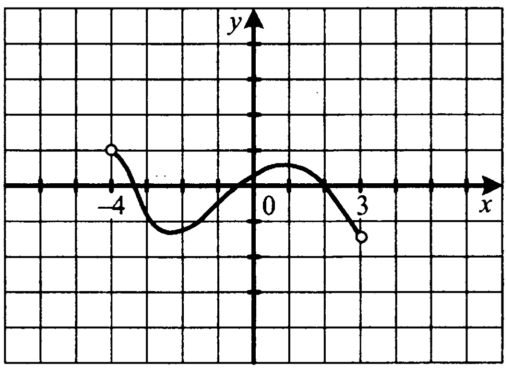


4. Из класса, в котором учатся 11 мальчиков и 9 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Найдите вероятность того, что дежурной окажется девочка.

5. Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{2^{2x}-2^{x}-a}$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 90°, AH — перпендикуляр к BC, $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $AC = 3$. Найдите AH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (–4; 3). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



8. Объем цилиндра равен π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 1.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{12}{3^{\log_3 4}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t) = -t^2 + 8t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 15 метров.

11. Бригада рабочих должна изготовить 300 деталей. Изготавливая ежедневно на 10 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на пять дней раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 - 4$ на отрезке $[-3; 2]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 1 = 4\cos y \\ x = \cos y - 1 \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{7}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство: $(2x + 3)\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 10x + 26) \geq 0$.

16. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает катет BC в точке M, $AM = BM$ и $CM = 1$. Найдите BC.

17. 17 декабря 2014 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых областью определения функции $y = \dfrac{1}{2^{2x} - 2^x - a}$ является вся числовая прямая.

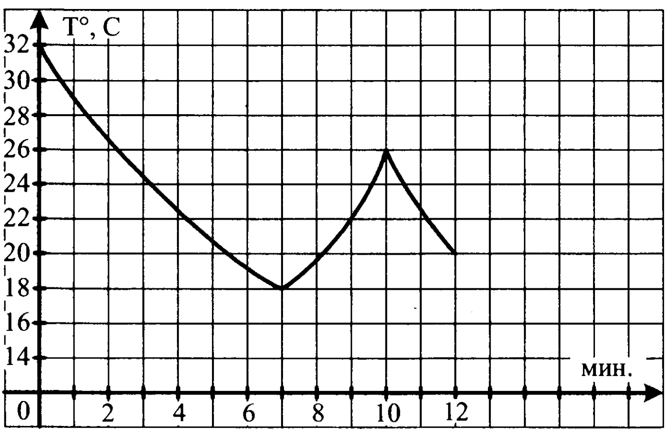
19. Решите уравнение в целых числах $mn^2 + 22 = 5m$.

Вариант 24

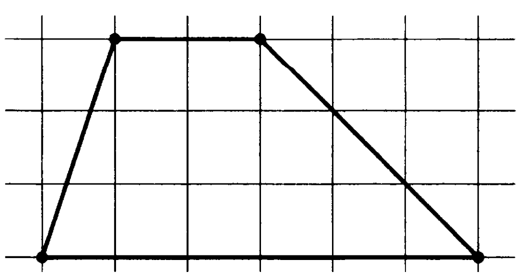
Часть 1

1. Килограмм апельсинов стоит 70 рублей. Сколько рублей сдачи вы получите с 500 рублей при покупке 1 кг 400 г апельсинов?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

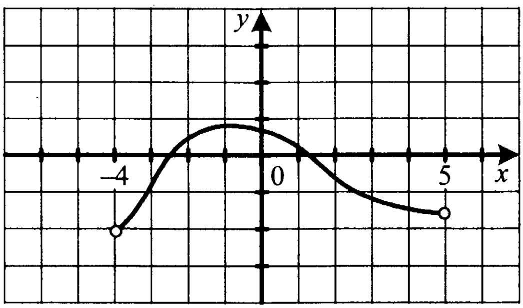


4. Из класса, в котором учатся 12 мальчиков и 10 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Найдите вероятность того, что дежурным окажется мальчик. Ответ округлите до десятых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(2x-1)=1$.

6. В треугольнике ABF угол B равен $90°$, BH — перпендикуляр к AF, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BF = 6$. Найти BH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (–4; 5). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



8. Объем цилиндра равен 4π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 2.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{15}{5^{\log_5 3}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t) = -t^2 + 9t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 18 метров.

11. Бригада рабочих должна изготовить 360 деталей. Изготавливая ежедневно на 2 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на два дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 2$ на отрезке [–4; 4].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 12\sin y - 2 \\ x - 1 = 2\sin y \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, а диагональ боковой грани равна 1. Найдите угол между плоскостью B_1AC и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство: $\dfrac{x^2 - 1,5x - 1}{\log_{\sqrt{2}}|x|} < 0$.

16. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M. Найдите диаметр окружности, если $AM = 3$, $BM = 10$.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1} - \left(\sqrt[3]{a}\right)^{10} + a^3\sqrt[3]{x} - x^{\frac{1}{3} + x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.

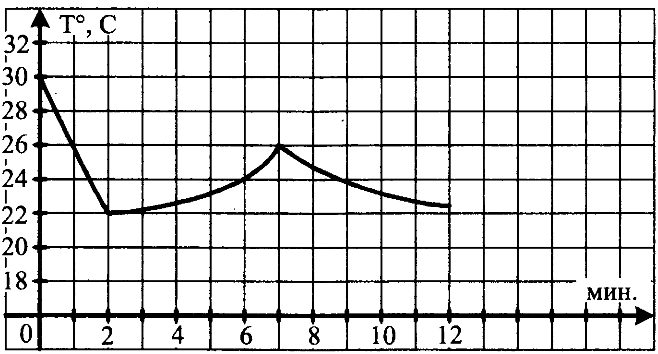
19. Решите уравнение в целых числах $mn^2 + 40 = 5m$.

Вариант 25

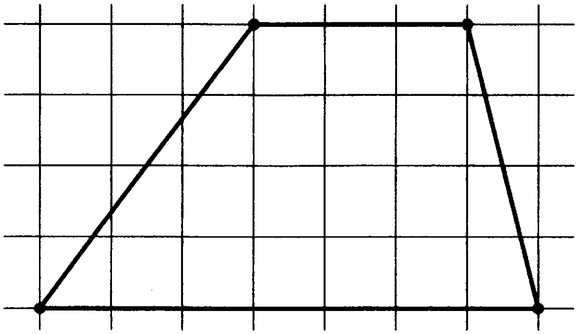
Часть 1

1. Килограмм бананов стоит 40 рублей. Сколько рублей сдачи вы получите с 1000 рублей при покупке 2 кг 600 г бананов?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

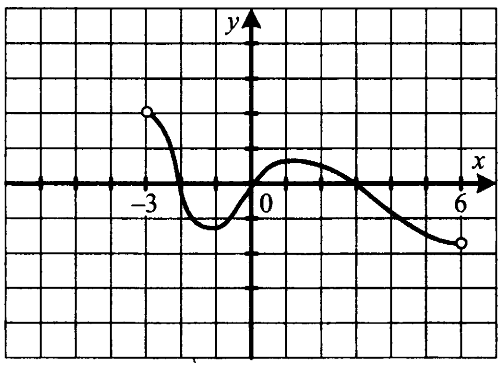


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_5(2-x)=2$.

6. В треугольнике BCD угол D равен 90°, DH — перпендикуляр к BC, $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $DC=6$. Найдите DH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–3; 6). Найдите количество точек экстремума функции $y=f(x)$.



8. Объем цилиндра равен 8π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 4.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{18}{7^{\log_7 9}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+9t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 20 метров.

11. Бригада рабочих должна изготовить 400 деталей. Изготавливая ежедневно на 10 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на два дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-x^2-1$ на отрезке $[-3; 3]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2=8\operatorname{tg}x+4 \\ y-2=2\operatorname{tg}x \end{cases}$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13. Найдите угол между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство: $\frac{\log_{\sqrt{13}}|x-5|}{x^2-10x+21}>0$.

16. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом при основании, равным 75°, описана окружность с центром O. Площадь треугольника BOC равна 16. Найдите радиус окружности.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left((xa^{12})^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}a^{6,5}+\sqrt{2a}\cdot x^{2x\log_x a}-a^{2x}\sqrt{x}\right)^{0,25}$ содержит только одно целое число.

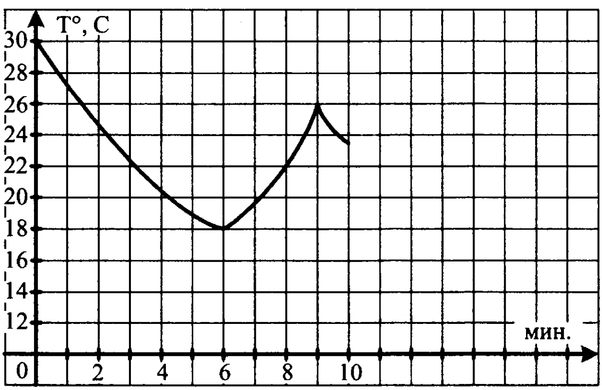
19. Решите уравнение в целых числах $mn^2+40=3m$.

Вариант 26

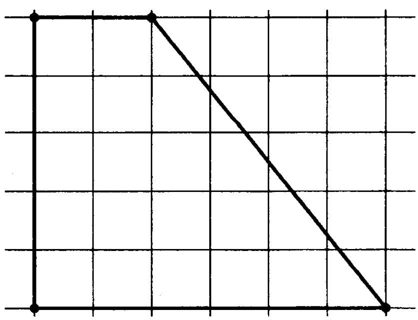
Часть 1

1. В летнем лагере на каждого ребенка полагается 40 г сахара в день. В лагере 120 детей. Какое наименьшее число килограммовых пачек сахара достаточно для всех детей на неделю?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

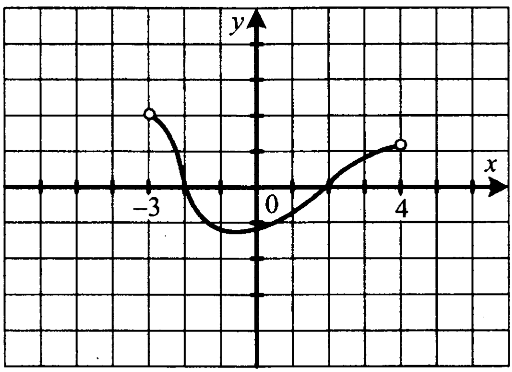


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=2$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 90°, AH — перпендикуляр к BC, $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC=10$. Найти AH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–3; 4). Найдите точку максимума функции $y=f(x)$.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 30. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 10.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{20}{7^{\log_7 2}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+10t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 24 метров.

11. Пассажирский поезд длиной 600 м движется со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 1 км со скоростью 60 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-4; 1]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 = 4\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 3 \\ y + \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x \end{cases}$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $BC = 18$, $\operatorname{tg}C = 0{,}4$. Найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство: $\dfrac{1 + \sqrt{6 + 5x - 4x^2}}{\log_{3x+3} 7} \geq 0$.

16. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. Высоты AH и BK треугольника пересекаются в точке M, $\angle AMB = 105°$. Найдите угол ABO.

17. 18 декабря 2014 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5\log_x a} + \left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{a}\right)^{16} - x^{\frac{1}{3} + x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.

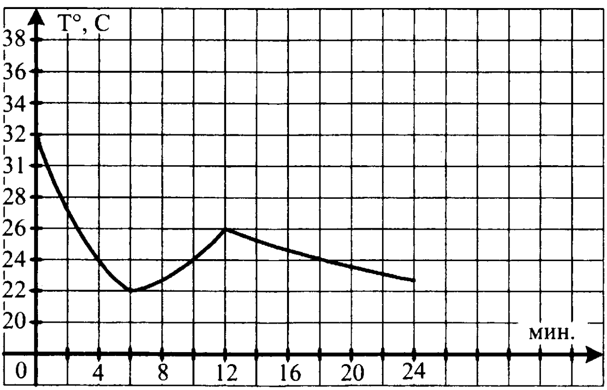
19. Решите уравнение в целых числах $m^2 + n^2 = 5$.

Вариант 27

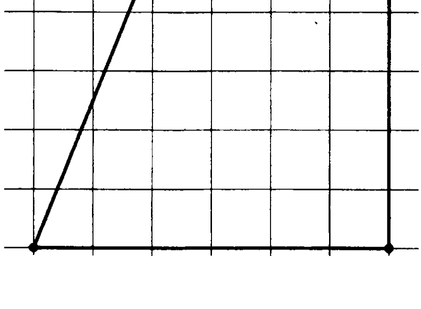
Часть 1

1. В летнем лагере на каждого ребенка полагается 35 г сахара в день. В лагере 80 детей. Какое наименьшее число килограммовых пачек сахара достаточно для всех детей на две недели?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

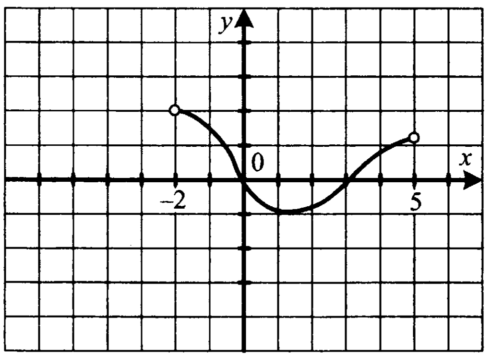


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 3 очка. Результат округлите до тысячных.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(7-x)=3$.

6. В треугольнике BCE угол C равен 90°, CH — перпендикуляр к BE, $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $BC=3$. Найдите CH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–2; 5). Найдите точку максимума функции $y=f(x)$.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 15. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 5.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{14}{5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+11t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 30 метров.

11. Пассажирский поезд длиной 500 м движется со скоростью 90 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 1100 м со скоростью 70 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 - 4$ на отрезке [–3; 2].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos x\sqrt{\sin y} = 0 \\ 2\cos^2 x = 2\sin^2 y - 1 \end{cases}$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, $\mathrm{tg}A = 0{,}5$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью ACC_1.

15. Решите неравенство: $\log_{\frac{3}{x}} \dfrac{9}{24-2x} \le 2$.

16. В треугольнике ABC $\angle B = 30°$. Около треугольника описана окружность радиусом 12. Хорда BK проходит через середину M стороны AC, $MK = 2$. Найдите BM.

17. 12 октября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 456 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 октября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(a^{2x+0,5} - \left(\sqrt{a}\right)^{17} + \sqrt{2x}\cdot a^8 - (2x)^{0,5+2x\log_{2x} a}\right)^{0,5}$ содержит одно, два или три целых числа.

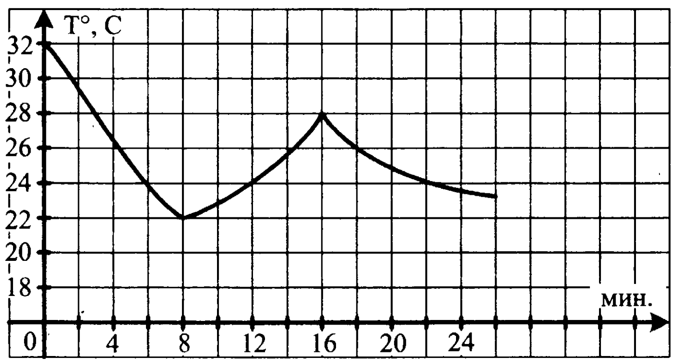
19. Решите уравнение в целых числах $m^2 + n^2 = 8$.

Вариант 28

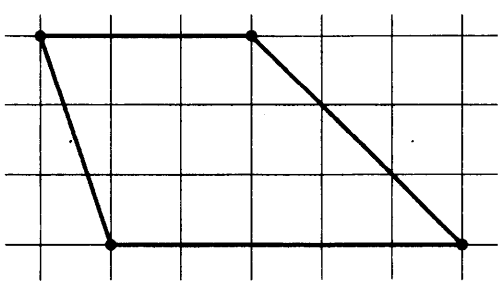
Часть 1

1. В летнем лагере на каждого ребенка полагается 200 г картофеля в день. В лагере 160 детей. Какое наименьшее число пятикилограммовых мешков картошки достаточно для всех детей на неделю?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

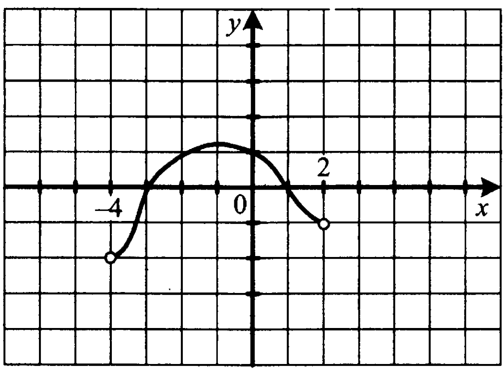


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 18 очков. Результат округлите до тысячных.

5. Найдите корень уравнения $\log_2(6-2x)=4$.

6. В треугольнике PQR угол Q равен 90°, QH — перпендикуляр к PR, $\cos P=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $PQ=9$. Найти QH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–4; 2). Найдите точку максимума функции $y=f(x)$.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 14. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 14.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{39}{5^{\log_{25}169}}+1$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+12t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 35 метров.

11. Пассажирский поезд длиной 400 м движется со скоростью 70 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 800 м со скоростью 50 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 2$ на отрезке $[-4; 4]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x\sqrt{\cos y} = 0 \\ \sin^2 y = \dfrac{3}{2} - \cos^2 x \end{cases}$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $3\sqrt{5}$. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $BC = 12$, $\operatorname{tg}C = 0{,}3$. Найдите тангенс угла между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.

15. Решите неравенство: $\log_{|x+3|} \dfrac{2x+6}{|x|} \le 1$.

16. Радиусы окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и окружности, описанной около него, равны 2 и 5. Найдите периметр треугольника.

17. 17 апреля 2015 года Анна взяла в банке 1 856 400 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+0,5} + \sqrt[4]{a^{24} \cdot x} - \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x} \sqrt[4]{x} - 2^{25\log_{16} a} \right)^{0,5}$ содержит два или три целых числа.

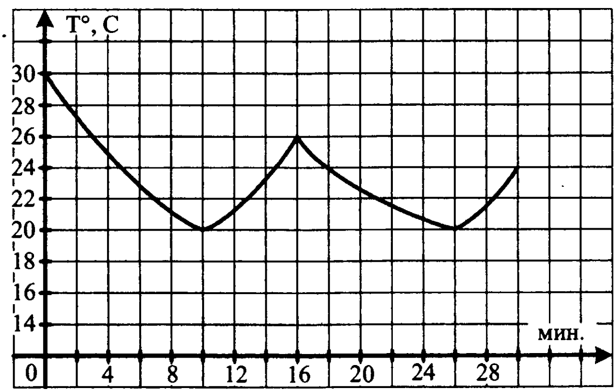
19. Решите уравнение в целых числах $m^2 + n^2 = 9$.

Вариант 29

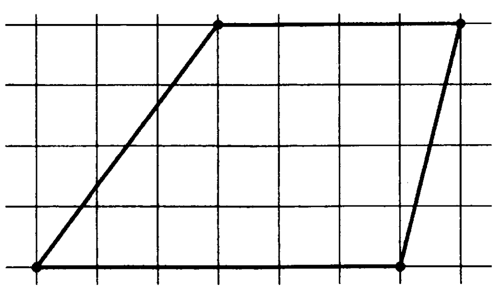
Часть 1

1. В летнем лагере на каждого ребенка полагается 300 г картофеля в день. В лагере 140 детей. Какое наименьшее число десятикилограммовых мешков картошки достаточно для всех детей на три недели?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

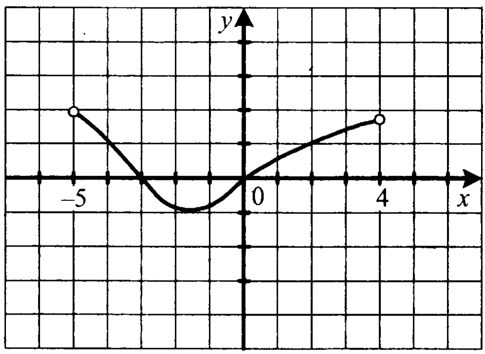


4. В партии из 500 компьютеров оказалось 8 бракованных. Какова вероятность купить исправный компьютер?

5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(x-1) = -1$.

6. В треугольнике MLN угол N равен 90°, NH — перпендикуляр к ML, $\cos M = \dfrac{12}{13}$, $MN = 13$. Найдите NH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (–5; 4). Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 46. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 23.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{18}{5^{\log_5 2}} + 1$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t) = -t^2 + 13t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 42 метров.

11. Пассажирский поезд длиной 300 м движется со скоростью 120 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 700 м со скоростью 80 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-x^2-1$ на отрезке [–3; 3].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases}\operatorname{ctg} y\sqrt{\operatorname{tg} x}=0\\ \operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 y=3\end{cases}$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{11}$. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 10$, $\operatorname{tg}C = 0{,}6$. Найдите тангенс угла между прямой BC_1 и плоскостью AA_1C_1.

15. Решите неравенство: $\log_{x^3}(x^2-10x+24)<\log_x\sqrt[3]{4x}$.

16. В треугольнике ABC $\angle B=60°$, $BC=3AB$. Около треугольника описана окружность радиуса $8\sqrt{3}$, и в него же вписана окружность с центром O. Луч BO пересекает сторону AC в точке M. Найдите CM.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Иванович взял в банке 1,5 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Иванович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Иванович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 375 тыс. рублей?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $3\sin x = p - 4\cos x$ **не имеет** корней.

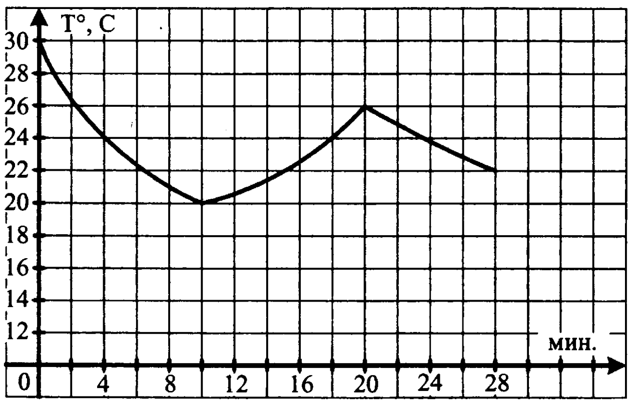
19. Решите уравнение в целых числах $m^2+n^2=10$.

Вариант 30

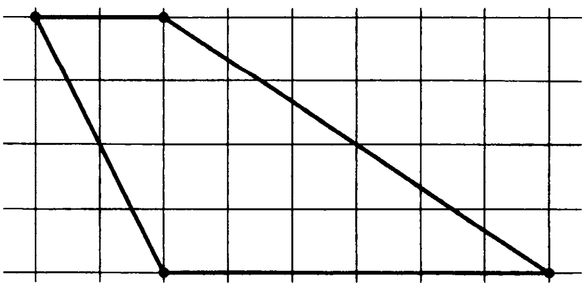
Часть 1

1. В летнем лагере на каждого ребенка полагается 15 г соли в день. В лагере 240 детей. Какое наименьшее число килограммовых пачек соли достаточно для всех детей на неделю?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

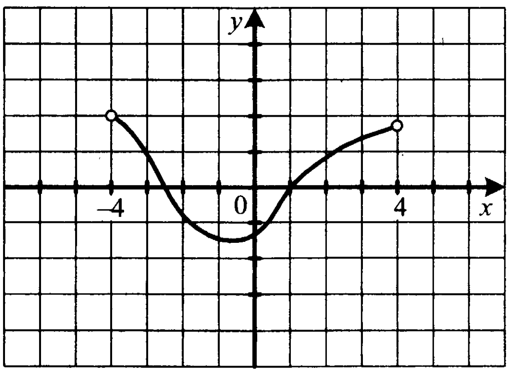


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найти вероятность того, что решка выпадет один раз.

5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)=2$.

6. В треугольнике STK угол S равен 90°, SH — перпендикуляр к TK, $\cos K=\frac{5\sqrt{3}}{14}$, $SK=14$. Найти SH.

7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке $(-4;\ 4)$. Найдите точку минимума функции $y=f(x)$.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 3. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 2.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{21}{3^{\log_3 7}}+\frac{6}{7^{\log_7 3}}$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+14t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 48 метров.

11. Пассажирский поезд длиной 300 м движется со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 600 м со скоростью 80 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-4; 1]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos y\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0 \\ \operatorname{ctg}^2 x + \sin^2 y = 4 \end{cases}$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{7}$. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $BC = 6$, $\operatorname{tg} B = 1$. Найдите тангенс угла между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство: $\log_{(x-2)^6}(7-2x) > \frac{1}{3}$.

16. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно 15, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 20% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 300 тысяч рублей?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $|x^2 + x| = p - 2$ имеет четыре корня.

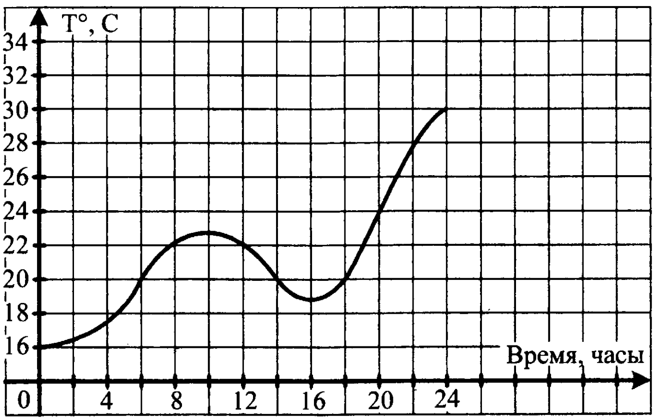
19. Решите уравнение в целых числах $m^2 + n^2 = 13$.

Вариант 31

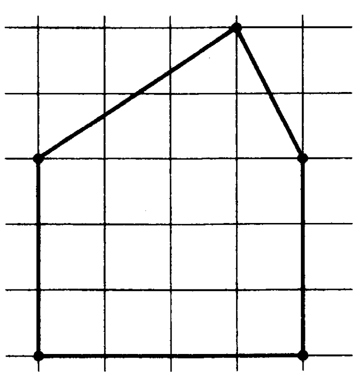
Часть 1

1. В магазине цена телевизора 5000 рублей. Сколько рублей будет стоить телевизор после двух понижений цены на 10%?

2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Сколько часов температура была ниже 20 градусов?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найти вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

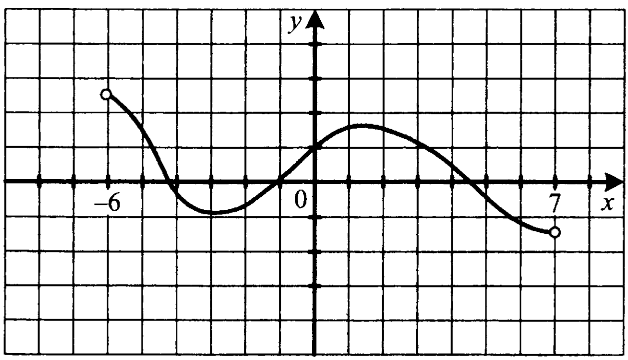
5. Найдите корень уравнения $\frac{3}{3+2x}=\frac{1}{2}$.

6. В треугольнике ABC $AB=BC=3$, $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найти AC.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке (–6; 7). На рисунке изображен график производной этой функции.

К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 45°.

Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π, а его высота равна 3. Найдите радиус основания цилиндра.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{\log_3 5}{\log_3 25}-\frac{\log_4 7}{\log_4 49}$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=2t^2-5t+3$. Найдите момент времени, когда точка остановится.

11. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа, а второй трубой — за 3 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 6 часов. За сколько часов заполнится изначально пустой бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 2]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\sin^2 x - 4\sin x = 3 \\ \sqrt{y^2 - 2y + 4} = 2\cos x \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 13, образующая цилиндра равна 10,5. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 5. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{27}(x^2-2x)^3} > 1$.

16. Правильный двенадцатиугольник $A_1A_2...A_{12}$ вписан в окружность радиуса 7. Найдите площадь треугольника $A_1A_2A_7$.

17. 15 декабря 2014 года Андрей взял в банке 108 500 рублей в кредит под 17% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 15 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $|\sin x| = p^3$ не имеет корней.

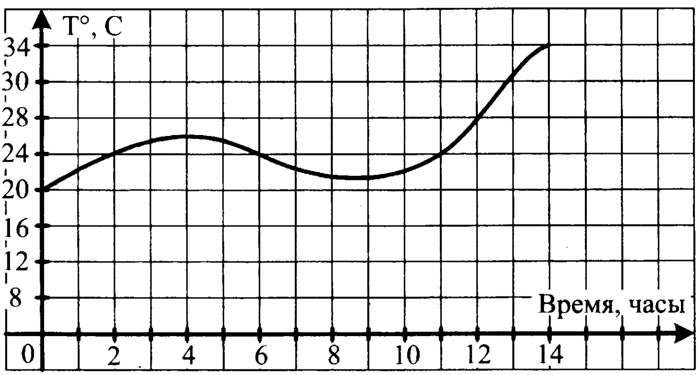
19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ не делится на n^{n^2}.

Вариант 32

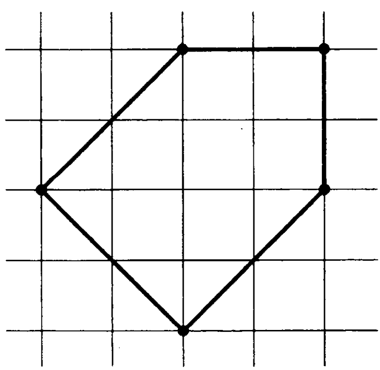
Часть 1

1. В магазине цена холодильника 12 000 рублей. Сколько рублей будет стоить холодильник после двух понижений цены на 10%?

2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Сколько часов температура была ниже 24 градусов?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

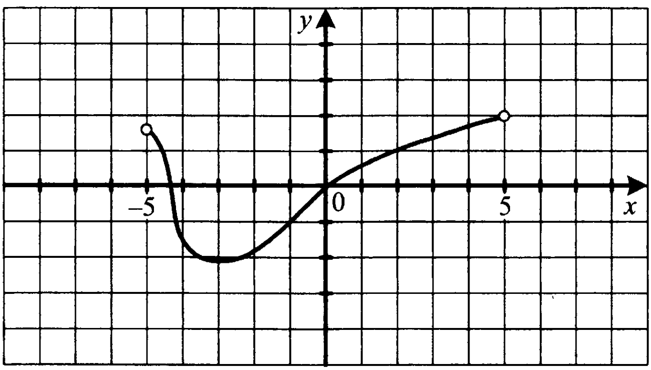


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найти вероятность того, что орел выпадет два раза.

5. Найдите корень уравнения $\frac{2}{1-x}=\frac{1}{3}$.

6. В треугольнике BCD $BC = CD = 4$, $\sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите BD.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 135°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 14π, а его высота равна 7. Найдите радиус основания цилиндра.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 343}+2^{\log_{64} 1}$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=3t^2-6t+2$. Найдите момент времени, когда точка остановится.

11. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 3 часа, а второй трубой — за 4 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 2 часа. За сколько часов заполнится изначально пустой бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^4 - 4x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 3]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos^2 x - 15\cos x + 7 = 0 \\ \sqrt{y^2 + y + 1} + \sin x = 0 \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 17, образующая цилиндра равна 23. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 15 и 8. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство: $3^{\log_{x+1}\frac{12x+4}{5-x}} > 9$.

16. Правильный двенадцатиугольник $A_1A_2...A_{12}$ вписан в окружность радиуса 6. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_2A_3A_8$.

17. 12 ноября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $e^{x^2-2x} = p$ имеет единственный корень.

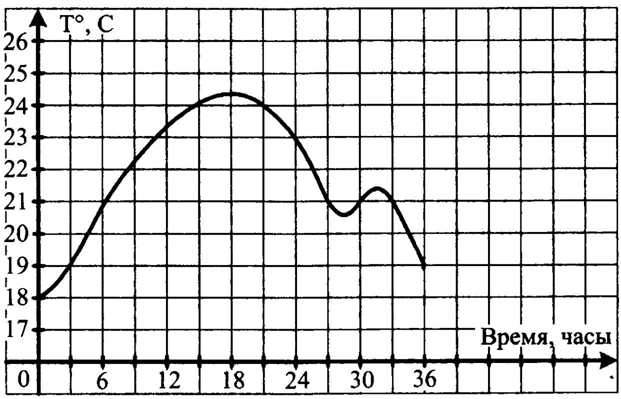
19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ не делится на n^{n^3}.

Вариант 33

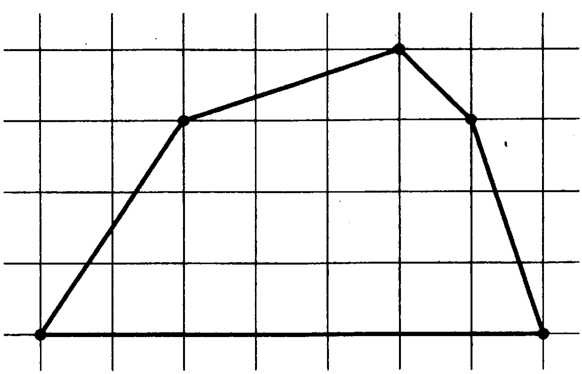
Часть 1

1. В магазине цена ноутбука 25 000 рублей. Сколько будет стоить ноутбук после двух понижений цены на 20%?

2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Сколько часов температура была выше 21 градуса?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

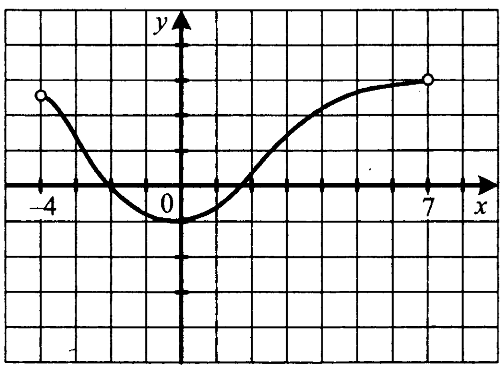


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет один раз.

5. Найдите корень уравнения $\frac{3}{2x-4}=\frac{1}{5}$.

6. В треугольнике PQR $PQ = QR = 8$, $\sin P = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите PR.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-4;\ 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 60°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а его высота равна 4. Найдите радиус основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $4\frac{\log_7 2}{\log_7 80}+\log_{80} 5$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=t^2-11t+5$. Найдите момент времени, в который скорость точки будет равна 1 м/с.

11. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 3 часа, а второй трубой — за 5 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 2 часа. За сколько часов заполнится изначально пустой бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2$ на отрезке $[-2; 3]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} x - 1) \\ \sqrt{y^2 + 6y + 11} - 2\sin x = 0 \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 15, образующая цилиндра равна 31,5. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 9 и 12. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство: $4^{\log_4^2 x} + x^{\log_4 x} < 8$.

16. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 15, а основания равны 7 и 25. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.

17. 17 декабря 2014 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $\sqrt{x} = |x + p|$ имеет единственный корень.

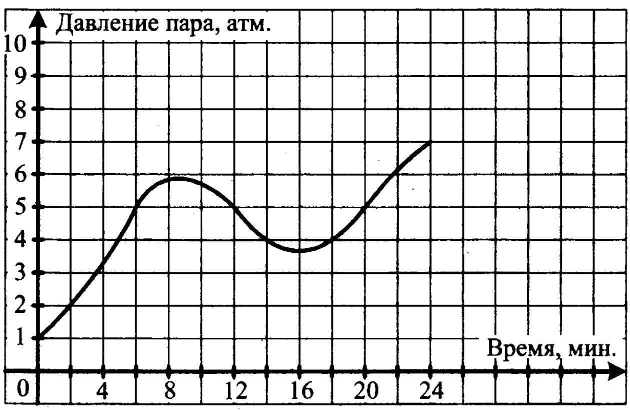
19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ не делится на n^{n^4}.

Вариант 34

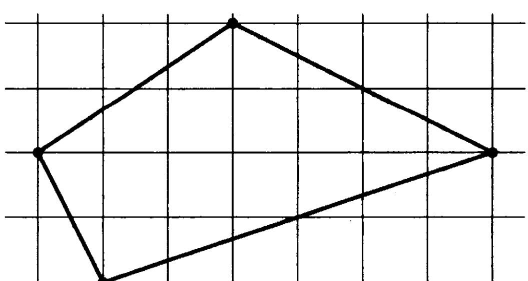
Часть 1

1. Продавец закупает на оптовой базе ботинки по цене 800 рублей за одну пару. При выставлении в торговый зал продавец делает наценку 20%. Сколько рублей стоит одна пара ботинок в сезон распродаж, когда цена на все товары понижается на 10%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было ниже 5 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

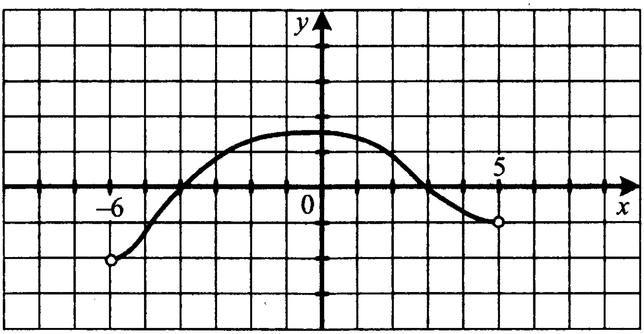


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет три раза.

5. Найдите корень уравнения $\frac{2x-4}{5}=\frac{3}{2}$.

6. В треугольнике MLN $MN = LN = 15$, $\sin M = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите ML.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-6; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 30°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $A_1D_1 = 2\sqrt{2}$, $AA_1 = 1$. Найдите длину диагонали параллелепипеда DB_1.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{\log_5 21}{\log_5 3}-\frac{\log_2 7}{\log_2 3}$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 3t + 2$. Найдите момент времени, в который скорость точки будет равна 1 м/с.

11. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 11. Найдите исходное число.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + x^3 + 4$ на отрезке $[-2; 1]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{ctg} x(1 - \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x(\operatorname{ctg} x - 1) \\ \sqrt{y^2 - 10y + 27} + 2\cos x = 0 \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 5, образующая цилиндра равна 7. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 3 и 4. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство: $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} - x^{\log_x 7} < 7$.

16. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на ее большем основании. Боковая сторона трапеции равна 15, радиус окружности равен 12,5. Найдите площадь трапеции.

17. 1 февраля 2015 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $p - 2\cos^3 x = 3\cos 2x$ не имеет корней.

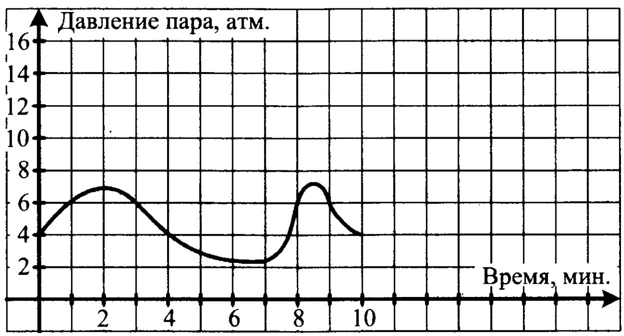
19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ не делится на n^{n^5}.

Вариант 35

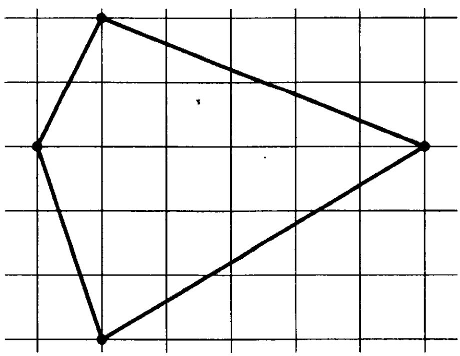
Часть 1

1. Продавец закупает на оптовой базе мониторы по цене 6000 рублей за штуку. При выставлении в торговый зал продавец делает наценку 10%. Сколько рублей стоит один монитор в сезон распродаж, когда цена на все товары снижается на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было выше 6 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

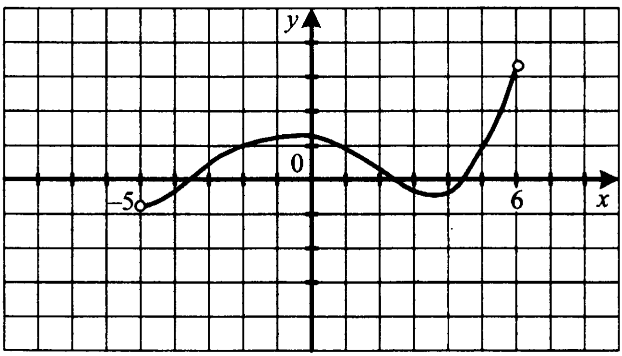


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают три раза. Найти вероятность того, что орел выпадет не менее двух раз.

5. Найдите корень уравнения $\frac{3+2x}{7}=\frac{1}{2}$.

6. В треугольнике STK $ST=SK=12$, $\sin K=\frac{\sqrt{11}}{6}$. Найти TK.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 6)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 30°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Объем цилиндра равен 4π. Найдите диаметр основания цилиндра, если его высота равна 1.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\frac{\log_3 25}{\log_3 65}+\frac{\log_{\sqrt{7}} 13}{\log_7 65}$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=t^2-4t+1$. Найдите момент времени, в который скорость точки будет равна 2 м/с.

11. Если двухзначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 6. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1 и в остатке 22. Найдите исходное число.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке [–2; 2].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos 2x = 4\cos x - 3 \\ \sqrt{y^2 - 2y} = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 10, образующая цилиндра равна 7. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 6 и 8. Найдите тангенс угла между плоскостью основания цилиндра и этой плоскостью.

15. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}} \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x+1}{x+7} < 0$.

16. Около трапеции, основания которой равны 4 и 16, описана окружность. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $3\cos 6x + \cos^3 3x - p = 0$ не имеет корней.

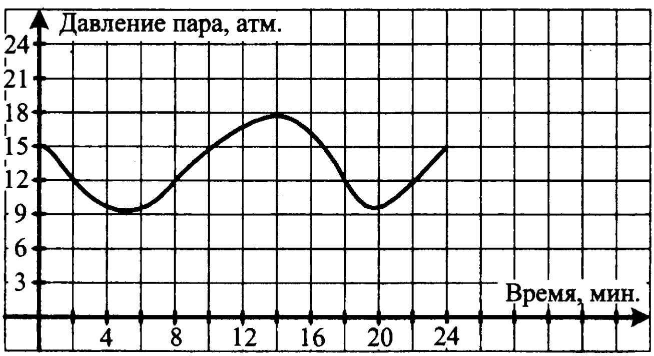
19. Найдите наибольшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ делится на n^{n^2}.

Вариант 36

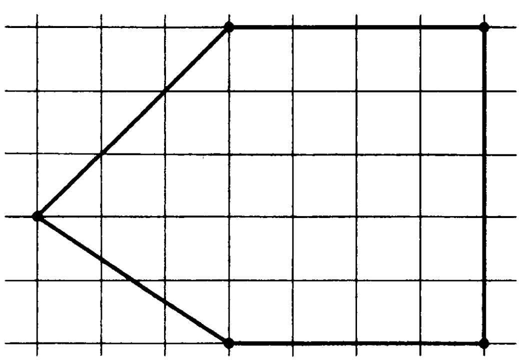
Часть 1

1. Продавец закупает на оптовой базе сотовые телефоны по цене 6000 рублей за штуку. При выставлении в торговый зал продавец делает наценку 30%. Сколько рублей стоит один сотовый телефон в сезон распродаж, когда цена на все товары снижается на 20%?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было ниже 12 атмосфер?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет более двух раз.

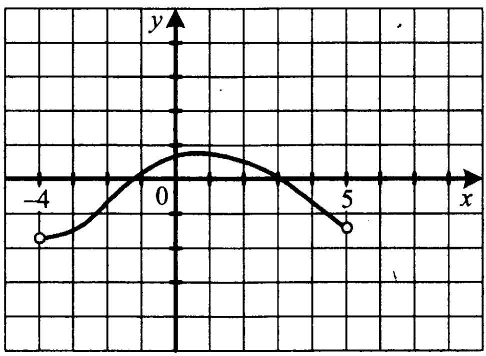
5. Найдите корень уравнения $\frac{5}{2x-1}=\frac{1}{2}$.

6. В треугольнике ABC $AB = BC$, AH — перпендикуляр к BC, $AC = 8$, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите AH.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-4;\ 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции.

К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 150°.

Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 50. Найдите высоту пирамиды SO, если площадь треугольника ABC равна 10.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $2\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 25}+7^{\log_{\sqrt{7}} 2}$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=t^3-5t^2+2t+1$. Найдите момент времени, в который ускорение точки будет равно 2 м/с^2.

11. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10 и в остатке 1. Найдите исходное число.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 4x^2 + 5$ на отрезке [–3; 3].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin 2x = \sin x \\ \sqrt{y^2 + y} + \sqrt{3} = \operatorname{tg} x \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 8,5, образующая цилиндра равна 5. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 4 и 7,5. Найдите тангенс угла между образующей цилиндра и этой плоскостью.

15. Решите неравенство: $\log_9\left(\log_2\left(2 - \log_2\sqrt{x-1}\right) - 1\right) < \frac{1}{2}$.

16. В правильный шестиугольник со стороной, равной 12, вписана окружность, в которую вписан правильный треугольник. Найдите сторону этого треугольника.

17. 18 декабря 2014 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $5\cos^3 x - p + 4\cos 2x = 0$ не имеет корней.

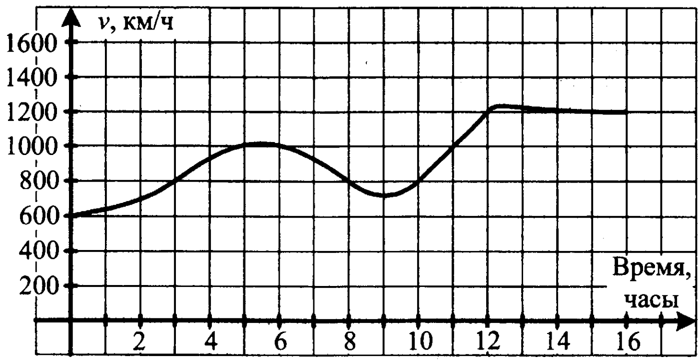
19. Найдите наибольшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ делится на n^{n^3}.

Вариант 37

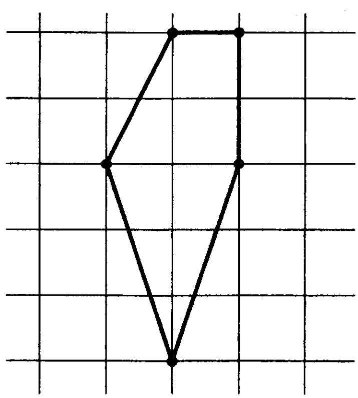
Часть 1

1. Сколько рублей стоит телевизор в магазине, если он на 20% дороже магнитофона, а магнитофон на 10% дешевле пылесоса, стоящего 8000 рублей?

2. На графике показано изменение скорости самолета в полете. Сколько часов скорость самолета была ниже 800 км/ч?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

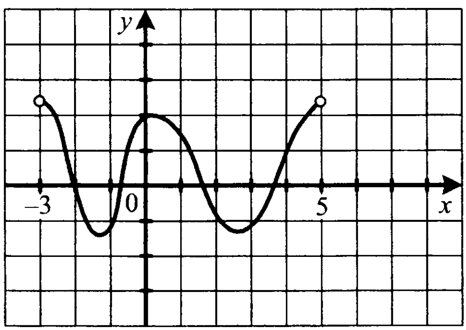


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет не более трех раз.

5. Найдите корень уравнения $\dfrac{7}{6-5x}=\dfrac{1}{8}$.

6. В треугольнике PQR $PR=QR$, PH — перпендикуляр к QR, $PQ=5$, $\sin Q=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите PH.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 45°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 5. Найдите высоту пирамиды SO, если площадь треугольника ABC равна 2.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_3 17}{\log_3 527}+\log_{527} 31$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=t^3-2t^2+3t+4$. Найдите момент времени, в который ускорение точки будет равно 2 м/с^2.

11. Трехзначное число оканчивается цифрой 5. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 207 больше первоначального. Найдите первоначальное число.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x + 2)e^{1-x}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x\operatorname{tg} y = 3 \\ x\operatorname{ctg} y = 9 \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равна $3\sqrt{10}$, образующая цилиндра равна 6. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 3 и 9. Найдите тангенс угла между образующей цилиндра и этой плоскостью.

15. Решите неравенство: $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \log_2 \log_{x+1} 9 > 0$.

16. Равнобедренный треугольник вписан в окружность. Радиус окружности равен 9, а основание треугольника равно $8\sqrt{5}$. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

17. 12 октября 2014 года Дмитрий взял в банке 1 456 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 октября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение $3\cos 4x - p = 2\cos^3 2x$ не имеет корней.

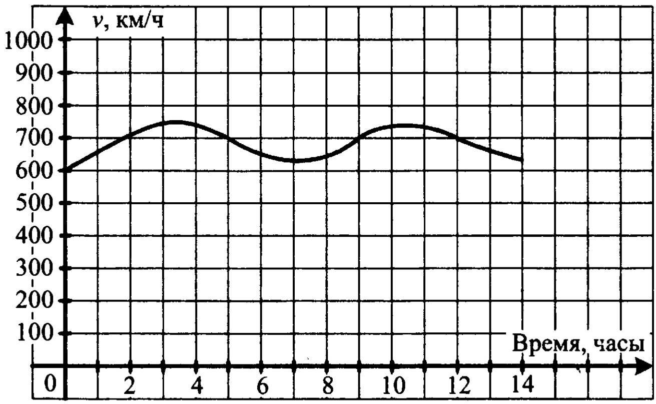
19. Найдите наибольшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ делится на n^{n^4}.

Вариант 38

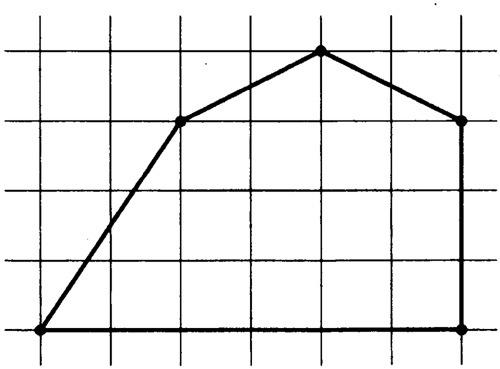
Часть 1

1. Сколько рублей стоит ноутбук в магазине, если он на 40% дороже телевизора, а телевизор на 20% дороже сотового телефона, стоящего 12 000 рублей?

2. На графике показано изменение скорости самолета в полете. Сколько часов скорость самолета была выше 700 км/ч?



3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен многоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

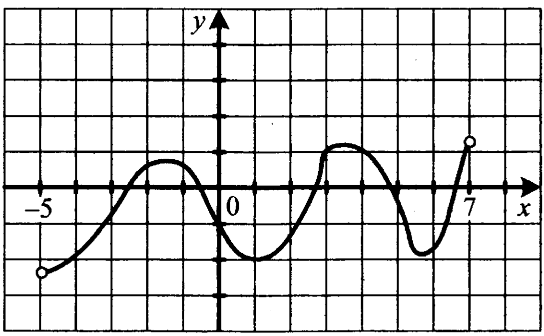


4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают пять раза. Найти вероятность того, что орел выпадет более одного раза.

5. Найдите корень уравнения $\frac{11}{5x+7}=\frac{2}{9}$.

6. В треугольнике MLN $ML = MN$, LH — перпендикуляр к MN, $LN = 4\sqrt{7}$, $\sin L = \frac{3}{4}$. Найти LH.

7. Функция $f(x)$ определена на промежутке (–5; 7). На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, составляющие с осью абсцисс угол 135°. Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 34. Найдите высоту пирамиды SO, если площадь треугольника ABC равна 3.

Часть 2

9. Вычислите значение выражения $2\cdot\frac{\log_3 6}{\log_9 3}-\log_3 16$.

10. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t)=t^3-2t^2+5t+2$. Найдите момент времени, в который ускорение точки будет равно 8 м/с^2.

11. Трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 396 меньше первоначального. Найдите первоначальное число.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^5 + x^3 + 4$ на отрезке [–2; 1].

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = 6\operatorname{ctg} y \\ x = 2\operatorname{tg} y \end{cases}$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равна $2\sqrt{13}$, образующая цилиндра равен 10. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 4 и 6. Найдите тангенс угла между образующей цилиндра и этой плоскостью.

15. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{13}} \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > 0$.

16. В треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно $\sqrt{6}$. $\angle BAC = 45°$, $\angle ACB = 60°$. Найдите длину стороны AB.

17. 17 апреля 2015 года Анна взяла в банке 1 856 400 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения p, при которых уравнение
$5\cos 8x + p = 6\sin^3 4x$ не имеет корней.

19. Найдите наибольшее натуральное n, при котором число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010$ делится на n^{n^2}.

СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

1. Алгебра

1.1. Числа, корни и степени

1. Вычислите: $\sqrt[3]{216\cdot 0{,}001}$.

2. Вычислите: $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0625}$.

3. Вычислите: $\sqrt{25:0{,}04}\cdot\sqrt[3]{27:125}$.

4. Вычислите: $\dfrac{1}{\sqrt{25\cdot 0{,}09}}\cdot\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027\cdot 64}$.

5. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{216\cdot 0{,}125}}{\sqrt[5]{243}}$.

6. Вычислите: $\sqrt[3]{64\cdot 0{,}125}$.

7. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}001\cdot 27}$.

8. Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}0016\cdot 81}$.

9. Вычислите: $\sqrt[3]{64\cdot 0{,}001}$.

10. Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 16}$.

11. Вычислите: $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}-\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}}-\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

12. Вычислите: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}}-1\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{36}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}}+1\right)$.

13. Вычислите: $(\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}-1)(\sqrt[4]{\dfrac{7}{6}}+1)(\sqrt[4]{\dfrac{7}{\sqrt{\dfrac{7}{6}}}}+1)$.

14. Вычислите: $(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+1)(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+1)-1$.

15. Вычислите: $(2{,}1\sqrt[4]{16\sqrt[3]{4}}+1{,}9\sqrt{4\sqrt[6]{4}})^{-\frac{6}{19}}$.

16. Вычислите: $(1{,}5\sqrt[3]{25\sqrt{5}}+3{,}5\sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-\frac{6}{11}}$.

17. Вычислите: $(0{,}3\sqrt[4]{27\sqrt{3}}+2{,}7\sqrt{3\sqrt[4]{27}})^{\frac{16}{15}}$.

18. Вычислите: $(1{,}1\sqrt{8\sqrt{2}}+0{,}9\sqrt{4\sqrt{8}})^{\frac{12}{11}}$.

19. Вычислите: $(2{,}2\sqrt{36\sqrt{6}}+3{,}8\sqrt[4]{36\sqrt{6^6}})^{-\frac{4}{9}}$.

20. Вычислите: $(1{,}02\cdot\sqrt{7\cdot\sqrt[3]{49}}+5{,}98\sqrt[3]{49\sqrt{7}})^{-\frac{12}{11}}$.

21. Вычислите: $(2{,}3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{3}}+0{,}7\sqrt[15]{81})^{\frac{15}{19}}$.

22. Вычислите: $(1{,}5\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}+2{,}5\sqrt[3]{4})^{-\frac{3}{8}}$.

23. Вычислите: $\left(3{,}7\sqrt[3]{64\sqrt{8}}+4{,}3\sqrt{8\sqrt[3]{64}}\right)^{\frac{2}{11}}$.

24. Вычислите: $\left(1{,}2\sqrt[7]{2\sqrt{32}}+0{,}8\sqrt{2}\right)^{2}$.

25. Вычислите: $\left(\left(\sqrt{\left(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)}-1\right)(\sqrt{3}+1)\right)^{3}$.

26. Вычислите: $\left(\sqrt{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)}\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$.

27. Сравните $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{7}}$ и $\left(\frac{9}{15}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$.

28. Сравните $\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{7}{8}}:\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.2. Основы тригонометрии

1.2.1. Тригонометрические функции произвольного угла

29. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{5\cos(\pi+\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

30. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

31. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\alpha=-\dfrac{4\pi}{7}$.

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

33. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{5}$.

34. Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{4\pi}{5}$.

35. Найдите значение выражения $\dfrac{\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

36. Найдите значение выражения $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{7\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

37. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

38. Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{9}$.

39. Найдите значение выражения $\cos^2(5\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin 2\alpha$, если $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

1.2.2. Синус и косинус двойного угла

40. Найдите sin 2*a*, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

41. Найдите cos 2*a*, если $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$.

42. Найдите sin *a*, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}, 0<\alpha<\pi$.

43. Найдите cos *a*, если $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pi\le\alpha\le 2\pi$.

1.2.3. Соотношения между тригонометрическими функциями

44. Найдите ctg 2*a*, если $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

45. Найдите tg 2*a*, если $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}}, \dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

1.2.4. Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

46. Найдите значение выражения $\cos 15°(\cos 35°\sin 50° - \cos 50°\sin 35°)$.

47. Найдите значение выражения $\cos 45°(\cos 25°\sin 70° - \cos 70°\sin 25°)$.

48. Найдите значение выражения
$\sqrt{3}\sin 30°(\cos 10°\cos 20° - \sin 10°\sin 20°)$.

49. Найдите значение выражения $\cos 15°(\sin 5°\cos 10° - \cos 5°\sin 10°)$.

50. Найдите значение выражения
$\cos 75°(\sin 100°\cos 25° - \cos 100°\sin 25°)$.

51. Найдите значение выражения
$4\sin 30°(\cos 10°\cos 20° - \sin 10°\sin 20°)$.

52. Найдите значение выражения $4\sin 10°\sin 20° - 2\cos 10°$.

53. Найдите значение выражения $\sin 10°\cos 20° + 0{,}5\sin 10°$.

54. Найдите значение выражения $\cos 100°\cos 20° - 0{,}5\cos 80°$.

1.3. Логарифмы

55. Вычислите: $\log_{7\sqrt{7}} \frac{49}{13}$, если $\log_{\sqrt[4]{7}} 169 = a$.

56. Вычислите: $\log_{2\sqrt[3]{2}} \frac{7}{16}$, если $\log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{7} = a$.

1.4. Преобразование выражений

1.4.1. Выражения, включающие корни натуральной степени

57. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{27 \cdot 125 \cdot 8}$.

58. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{27}$.

59. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\frac{343}{8} \cdot \frac{27}{125}}$.

60. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{245}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{3}}$.

61. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{3^3} + \sqrt{7^2} - \sqrt[3]{6^6}$.

62. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[13]{11}\right)^{26} + \left(\sqrt[5]{2}\right)^{15}$.

63. Найдите значение выражения $\sqrt{\sqrt[3]{2^6 \cdot 6^{12}}}$.

64. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12}}$.

65. Найдите значение выражения $\sqrt[17]{\frac{36^{34}}{4^{51}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}}$.

66. Найдите значение выражения $\sqrt{\sqrt[3]{3^{11}}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[7]{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13^{13}}}$.

67. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[15]{17^{46}}}{\sqrt[15]{17}}}-\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt[4]{5^{57}}}{\sqrt[4]{5}}}$.

68. Найдите значение выражения $(\sqrt[18]{4^3\cdot 27^2})^3$.

69. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[24]{2^{36}\cdot 81^6\cdot 49^{12}}}{\sqrt{2}}$.

70. Вычислите значение выражения $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

71. Вычислите значение выражения $\sqrt{37-20\sqrt{3}}+\sqrt{37+20\sqrt{3}}$.

72. Вычислите значение выражения $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

73. Вычислите значение выражения $\dfrac{13}{4-\sqrt{3}}+\dfrac{13}{4+\sqrt{3}}$.

74. Вычислите значение выражения $\dfrac{1}{5-2\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{5}}$.

75. Вычислите значение выражения $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$.

76. Вычислите значение выражения $\dfrac{31}{6-\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.

77. Упростить выражение: $\sqrt[5]{\dfrac{a^2\cdot\sqrt[3]{a^9}}{32}}$.

78. Упростить выражение: $\sqrt[7]{\dfrac{128z^3}{\sqrt[3]{z^{12}}}}$.

79. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{243z^{15}}}{z^6}}$.

80. Упростить выражение: $\sqrt{\dfrac{b^3\sqrt[5]{b^6}}{64\sqrt[5]{b}}}$.

81. Упростить выражение: $\sqrt[6]{\dfrac{64}{b^7\sqrt[3]{b^{15}}}}$.

82. Упростить выражение: $\dfrac{\sqrt[3]{81\sqrt[5]{t^2}}}{\sqrt[3]{24t^2\sqrt[5]{t^7}}}$.

83. Упростить выражение: $\sqrt[5]{\dfrac{32\sqrt[3]{z^7}}{z\sqrt[3]{z}}}$.

84. Упростить выражение: $\dfrac{\sqrt{54\sqrt[7]{z^9}}}{\sqrt{24z^5\sqrt[7]{z^2}}}$.

85. Упростить выражение: $\sqrt[5]{9a^7b^3}\cdot\sqrt[5]{27a^3b^2}$.

86. Упростить выражение: $\sqrt[6]{4a^5b^5}\cdot\sqrt[6]{16a^7b^{19}}$.

1.4.2. Выражения, включающие операцию возведения в степень

87. Найдите значение выражения $7^{\frac{1}{7}}\cdot7^{\frac{2}{7}}\cdot7^{\frac{4}{7}}-5^{\frac{1}{9}}\cdot5^{\frac{3}{9}}\cdot5^{\frac{5}{9}}$.

88. Найдите значение выражения $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}-3^{\frac{1}{3}}$.

89. Найдите значение выражения $(125^{\frac{7}{15}})^{\frac{15}{21}}+(8^{\frac{7}{15}})^{\frac{15}{21}}$.

90. Найдите значение выражения $(27\cdot4)^{\frac{1}{6}}-3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}}$.

91. Найдите значение выражения $(\dfrac{125}{16})^{\frac{1}{4}}\cdot(\dfrac{256}{25})^{\frac{1}{8}}$.

92. Найдите значение выражения $123^{\frac{5}{6}}\cdot(123)^{\frac{2}{3}}:123^{\frac{1}{2}}-10^{\frac{7}{8}}\cdot10^{\frac{3}{4}}\cdot10^{\frac{3}{8}}$.

93. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(49^{\frac{1}{3}}\cdot64^{\frac{1}{18}}\right)^3}{7}+\dfrac{\left(36^3\cdot81^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{18}$.

94. Найдите значение выражения $\dfrac{28^{\frac{1}{2}}+63^{\frac{1}{2}}}{5}-7^{\frac{1}{2}}$.

95. Найдите значение выражения $\dfrac{135^{\frac{1}{3}}-40^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}+125^{\frac{1}{3}}$.

96. Найдите значение выражения $\left(8^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\left(128^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{7}}$.

97. Представьте выражение $a^{\frac{7}{3}}:a^{-\frac{2}{3}}$ в виде степени с основанием a.

98. Представьте выражение $\left(a^{\frac{3}{2}}:a^{\frac{7}{2}}\right)\cdot a^{4}$ в виде степени с основанием a.

99. Представьте выражение $\left(a^{\frac{2}{3}}:a^{-\frac{5}{3}}\right)\cdot a^{\frac{5}{3}}$ в виде степени с основанием a.

100. Представьте выражение $\left(a^{\frac{3}{2}}:a^{-\frac{7}{2}}\right)\cdot a^{3}$ в виде степени с основанием a.

101. Представьте выражение $a^{\frac{7}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}$ в виде степени с основанием a.

102. Представьте выражение $a^{\frac{7}{6}}:a^{-\frac{5}{6}}$ в виде степени с основанием a.

103. Представьте выражение $a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$ в виде степени с основанием a.

104. Представьте выражение $a^{\frac{11}{4}}:a^{\frac{3}{4}}$ в виде степени с основанием a.

105. Представьте выражение $a^{\frac{6}{5}}\cdot a^{-\frac{1}{5}}$ в виде степени с основанием a.

1.4.3. Арифметические операции над выражениями, содержащими корни и степени

106. Упростите выражение $\dfrac{l^{\frac{4}{7}}-9}{l^{\frac{2}{7}}+3}+3$.

107. Упростите выражение $\dfrac{k+8}{k^{\frac{2}{3}}-2k^{\frac{1}{3}}+4}-k^{\frac{1}{3}}$.

108. Упростите выражение $2a+\dfrac{a^3+21a^2+147a+343}{(a+7)^2}-7$.

109. Упростите выражение $\dfrac{z^3-125}{z^2+5z+25}+\dfrac{z^3+125}{z^2-5z+25}$.

110. Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)^3-12a^{\frac{1}{3}}-6a^{\frac{2}{3}}$.

111. Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{2}}+7\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-7\right)^2$.

112. Упростите выражение $\left(c^{\frac{1}{3}}-3\right)^3+\left(c^{\frac{1}{3}}+3\right)^3$.

113. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

114. Упростите выражение $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$.

115. Найдите значение выражения $50\sqrt{(2x-1)^2}$ при $x=0{,}49$.

116. Найдите значение выражения $\sqrt{5-a}+\sqrt{7-a}$,
если $\sqrt{5-a}-\sqrt{7-a}=2$.

117. Найдите значение выражения $\sqrt{2+a}-\sqrt{3+a}$,
если $\sqrt{2+a}+\sqrt{3+a}=5$.

118. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt{2}$.

119. Найдите значение выражения $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x=2{,}01$.

120. Упростите выражение $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}$, если $x\in(3;7)$.

121. Найдите значение выражения $27\cdot\left(10{,}6\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{9}}-9\frac{3}{5}\sqrt[3]{9\sqrt{3}}\right)^{-\frac{18}{5}}$.

122. Найдите значение выражения $\left(2\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}\right)^{-4{,}8}$.

123. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}-\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}\right)^{-12}$.

124. Найдите значение выражения $\left(5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}\right)^{5}$.

125. Найдите значение выражения $\left(1{,}63\sqrt{2\sqrt[5]{16}}+0{,}37\sqrt[5]{16\sqrt{2}}\right)^{-\frac{20}{19}}$.

126. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}$.

127. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{33}{21\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}-15\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}}\right)^{-9}$.

128. Найдите значение выражения $\left(7{,}15\sqrt[4]{27\sqrt{3}}-4\frac{3}{20}\sqrt{3\sqrt[4]{27}}\right)^{-\frac{16}{15}}\cdot 9$.

129. Найдите значение выражения $\left(3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{12}{5}}$.

130. Найдите значение выражения $\left(2\sqrt{40\sqrt{12}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}\right)\cdot(25\cdot 27)^{\frac{1}{4}}$.

131. Упростите выражение $\dfrac{8^n-27}{2^{2n}+3\cdot 2^n+9}+3-2^n$.

132. Упростите выражение $\dfrac{4^n-16}{2^n-4}-\left(\sqrt{2}\right)^{2n}$.

133. Упростите выражение $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x-y}-\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$.

134. Упростите выражение $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$.

135. Упростите выражение: $\dfrac{\left(\sqrt[4]{x^{\frac{1}{7}}:x^{-\frac{3}{7}}}+\sqrt[3]{y^{\frac{2}{7}}:y^{-\frac{1}{7}}}\right)^2-\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{y^2}}{2}$.

136. Найдите значение выражения $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{6}}-1$ при $a=64$.

137. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}+2a^{0,5}-a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}+2}$ при $a=729$.

138. Найдите значение выражения $a^{\frac{3}{4}}+a^{0,5}-a^{0,25}-a^{0,125}+2$ при $a=256$.

1.4.4. Тригонометрические выражения

139. Упростите выражение $8-5\cos 2x-5\sin 2x$.

140. Упростите выражение $7\sin 2x+2+7\cos 2x$.

141. Упростите выражение $6-3\cos 2x-3\sin 2x$.

142. Упростите выражение $\cos 2x-2+\sin 2x$.

143. Упростите выражение $\sin^6 a+3\sin^4 a\cos^2 a+3\sin^2 a\cos^4 a+\cos^6 a$.

144. Упростите выражение $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{4}$.

145. Упростите выражение $2\sin^2\dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}+\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$.

146. Упростите выражение $20\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1-\text{tg}^4\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$.

147. Упростите выражение $\dfrac{1+\text{tg}^6\frac{\pi}{3}}{1-\text{tg}^2\frac{\pi}{3}+\text{tg}^4\frac{\pi}{3}}$.

148. Упростите выражение $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}$.

149. Упростите выражение $\dfrac{\sin^2\alpha(1+3\text{ctg}^2\alpha+3\text{ctg}^4\alpha+\text{ctg}^6\alpha)}{(1+\text{ctg}^2\alpha)^2}$.

150. Упростите выражение $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}$.

151. Упростите выражение
$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

152. Упростите выражение $(\sin^2x-\cos^2x)^2+\sin^2 2x$.

153. Упростите выражение $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha}$.

154. Упростите выражение
$$\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

155. Упростите выражение $\dfrac{(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)(1+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta)}{1-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{tg}^2\beta}$.

156. Упростите выражение $\dfrac{\text{tg}^3x-\text{tg}^3y}{(1+\text{tg}x\ \text{tg}y)(\text{tg}^2x+\text{tg}x\ \text{tg}y+\text{tg}^2y)}$.

157. Упростите выражение $\dfrac{\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha}{\cos 4\alpha}-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2$.

158. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{1-\text{tg}x}-\dfrac{1}{1+\text{tg}x}\right)\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$.

159. Найдите значение выражения $4\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{6})+4\sin\frac{7\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$.

160. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}$.

161. Упростите выражение $\dfrac{\cos(-\frac{\pi}{12})-\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{4}}$.

162. Упростите выражение $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}+\sin(\frac{7\pi}{12})}{\sin\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}}$.

163. Упростите выражение $(\sin a+\cos a)^2-1$.

164. Упростите выражение $(\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha)^2-1$.

165. Упростите выражение $(\cos 2a+1)\mathrm{tg}^2 a-1$.

166. Упростите выражение $(\cos^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin^2(\frac{3\pi}{2}-\alpha))^2-\sin^2\alpha$.

167. Упростите выражение $(\frac{\sin^3\alpha\cos^2\alpha+\sin^5\alpha}{\cos^3\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\alpha+1)\cdot\cos^2\alpha$.

168. Упростите выражение $\dfrac{\sin^3\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

169. Упростите выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

170. Упростите выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

171. Упростите выражение $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin^3\alpha}$.

172. Упростите выражение $\dfrac{\sin^3\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

173. Упростите выражение $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{x}{4}\right)\sin\dfrac{x}{4}$.

174. Упростите выражение $\dfrac{\sin 12x+\sin 8x+\sin 10x+\sin 9x+\sin 11x}{\cos 12x+\cos 8x+\cos 10x+\cos 9x+\cos 11x}$.

175. Упростите выражение $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x\cdot\operatorname{ctg}(x-\frac{5\pi}{4})}$.

176. Упростите выражение $(1+\dfrac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x)(1-\dfrac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x)\sin x$.

177. Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x+1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x}$.

178. Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

179. Упростите выражение $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2(-x)}{\operatorname{tg}^2(x-\pi)-1}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}-x)}{\operatorname{ctg}(\pi+x)}$.

180. Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-1\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)}{\operatorname{ctg}^2(x+\frac{3\pi}{2})+1}.$$

181. Упростите выражение $\dfrac{1+\cos^2(2x-\frac{\pi}{2})+\operatorname{ctg}^2(2x+\frac{\pi}{2})}{1+\sin^2(2x-\frac{3\pi}{2})+\operatorname{tg}^2(2x+\frac{3\pi}{2})}$.

182. Упростите выражение $\dfrac{\sin^2(x+\frac{3\pi}{2})}{\dfrac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}-1}+\dfrac{\cos^2(x-\frac{3\pi}{2})}{\dfrac{1}{\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}-1}$.

183. Упростите выражение $\dfrac{3}{-2\sin(\frac{9}{4}\pi+3\alpha)}\cdot\cos\left(\dfrac{13}{4}\pi-3\alpha\right)$.

184. Найдите значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1\frac{1}{3}$.

185. Найдите значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

186. Вычислите: $\cos10°+\cos20°+...+\cos180°$.

187. Упростите выражение $\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$.

188. Упростите выражение $(\sin\alpha+\cos\alpha)^4-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1$.

1.4.5. Логарифмические выражения

189. Найдите значение выражения $\log_{53}2+\log_{53}3+\log_{53}7$.

190. Найдите значение выражения $\log_{23}\frac{2}{3}+\log_{23}6-\log_{23}4$.

191. Найдите значение выражения $\log_3 90-\log_3 2-\log_3 5$.

192. Найдите значение выражения $2\log_{72}3+3\log_{72}2$.

193. Найдите значение выражения $\log_6 5\cdot\log_5 8+\log_6 27$.

194. Найдите значение выражения $\log_7(3^3\cdot7^5)-2\log_7 3-5$.

195. Найдите значение выражения $\log_{15}5^3+\log_{15}3^4+\log_{15}5^6 3^5$.

196. Найдите значение выражения $\frac{3}{4}\log_2 6-\log_{16}27+13^{\frac{3}{2}\log_{13\sqrt{13}}18}$.

197. Найдите значение выражения $\log_{105}12+\log_{105}5+\log_{105}7-\log_{105}4$.

198. Найдите значение выражения $(\log_{26} 5^{\log_5 169} + \log_{26} 4)^2 - 17^{4\log_{289} 3}$.

199. Найдите значение выражения $(\log_3 28 \cdot \log_{154} 3 + \log_{17} 11 \cdot \log_{154} 17 - \log_5 2 \cdot \log_{154} 5)^2 + 7$.

200. Найдите значение выражения $(\lg 900 - 2\lg 3)(\ln 49 \cdot \log_7 e + 1)$.

201. Найдите значение выражения $\log_6 2 + \log_6 3 + \log_6 6$.

202. Найдите значение выражения $(\log_3 72 - \log_3 18) \log_4 3 + 2$.

203. Найдите значение выражения $\log_{30} 5 + \log_{30} 12 - \log_{30} 2 + 4$.

204. Найдите значение выражения $\log_5 25 - \log_5 0{,}2 + 3$.

205. Найдите значение выражения $3 + \log_{30} 3 + \log_{30} 10$.

206. Найдите значение выражения $\log_6 18 - \log_6 3 + 2$.

207. Найдите значение выражения $\log_{27} 81 - \log_{27} 3 + 4$.

208. Найдите значение выражения $3 + \log_4 2 - \log_4 8$.

209. Найдите значение выражения $\log_7 98 + 2 - \log_7 2$.

210. Найдите значение выражения $(\log_{\sqrt[3]{3}} 9 + \log_7 21 - \log_7 3) \cdot 5^{\log_5 2}$.

211. Найдите значение выражения

$$(\log_{\sqrt[3]{5}} 25 - \log_2 4 - 4(\log_3 \sqrt{3})^2) \cdot 3^{\frac{1}{\log_2 3}} - 1.$$

212. Найдите значение выражения
$(\log_3 6 - \log_3 2)^{\sqrt{\log_3 9}} - (\log_7 14 - \log_7 2)^{\sqrt{\log_9 3}}$.

213. Найдите значение выражения
$(\log_3 \sqrt{27} + \dfrac{1}{2})^2 + (\log_{\sqrt{3}} 27 - \log_4 2 + \dfrac{1}{2})^2$.

214. Найдите значение выражения
$2 \cdot (\log_{\sqrt{7}} 49 - \log_3 \sqrt{27}) \cdot (\log_6 216 - 3^{\log_9 4})$.

215. Найдите значение выражения $\left(\log_2 10 + \log_{\sqrt[4]{2}} 2 - \log_2 5\right) \cdot 2^{\log_2 3}$.

216. Найдите значение выражения $(\log_6 4 + \log_6 9) \cdot (3^{\log_3 2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 2)$.

217. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{2} \cdot (3^{\log_3 4} - \log_3 18 + \log_3 2)$.

218. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[5]{7}\left(2^{\log_2 11} - \log_2 4 - \log_2 16\right)$.

219. Найдите значение выражения $2^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} \cdot \log_{\sqrt[8]{3}} \sqrt[3]{3} \cdot \left(\log_3 2 - \log_3 54\right)$.

220. Вычислите значение x, если
$\lg x = 2\lg 5 + 2\lg 2 - (\lg 5) \cdot \log_5 10 + 10^{\lg 2}$.

221. Вычислите значение x, если
$\log_3 x = 8 \cdot 0{,}2^{\log_5 2 + \log_5 4} + (\log_2 3) \cdot \log_3 2$.

222. Вычислите значение x, если
$\log_{0,5} x = \lg 125 - 2\lg 5 + \lg 20 - (\lg 27) \cdot \log_3 10$.

223. Вычислите значение x, если
$\log_2 x = \log_2 \log_4 \log_8 64 + \log_8 28 - \log_8 3{,}5$.

224. Вычислите значение x, если
$\log_{25} x = 0{,}25^{\lg 2} \cdot 0{,}4^{\lg 2} - 81^{0,5\log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$.

225. Вычислите значение x, если $\log_7 x = 4^{0,5\log_4 9 - 0,25\log_2 25} + 0{,}2 \cdot 3^{\log_9 4}$.

226. Вычислите значение x, если $\log_3 x = \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7\sqrt{7}$.

227. Вычислите значение x, если
$\log_2 x = 20^{\frac{1}{2\log_{81} 5}} \cdot 0{,}25^{\frac{1}{2\log_{81} 5}} - 0{,}2^{\log_5 0,25}$.

228. Вычислите значение x, если $\log_2(x-1) = 36^{\frac{1}{3}\log_6 8 + 2\log_6 3} : 49^{\log_7 9}$.

229. Вычислите значение x, если
$\log_3(x+1) = 2\log_3 343 \cdot \log_7 3 - 7^{\log_{21} 5} \cdot 3^{\log_{21} 5}$.

230. Найдите значения выражения: $\sqrt{\sqrt{\log_2^4 3 + \log_3^4 2 + 2} - 2}$.

231. Найдите значения выражения: $\dfrac{\log_2^2 3 + \log_2 9 \cdot \log_2 5 - 3\log_2^2 5}{\log_2 3 + 3\log_2 5}$.

232. Вычислите: $\left(\log_2 \sqrt{5} - \log_{\sqrt[3]{4}} 5 + \log_4 25 - \dfrac{1}{\log_5 2}\right)^2 - \log_2^2 \dfrac{2}{5}$.

1.5. Текстовые задачи

1.5.1. Проценты

233. Сколько граммов воды нужно выпарить из 0,5 кг солевого раствора, содержащего 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

234. В двух канистрах находится 90 л бензина. Если из первой канистры перелить во вторую 10% бензина, находящегося в первой канистре, то в обеих канистрах бензина будет поровну. Сколько литров бензина в каждой канистре?

235. Заработные платы рабочего за январь и февраль относятся, как 9 : 8, а за февраль и март, как 6 : 8. За март он получил на 450 руб. больше, чем за январь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найдите размер премии.

236. К 200 г раствора, содержащего 60% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

237. К 200 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 400 г раствора, содержащего 75% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

238. К 900 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 90% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

239. К 200 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 40% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

240. К 100 г раствора, содержащего 70% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

241. К 150 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 350 г раствора, содержащего 40% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

242. К 350 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 450 г раствора, содержащего 50% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

243. К 360 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 440 г раствора, содержащего 50% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

244. К 250 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 150 г раствора, содержащего 60% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

245. К 90 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 160 г раствора, содержащего 35% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

246. Для определения оптимального режима повышения цен социологи предложили фирме с 1 января повышать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине — в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 2%, в другом — через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо повышать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

247. Для определения оптимального режима снижения цен социологи предложили фирме с 1 января снижать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине — в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 10%, в другом — через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо снижать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

248. В соответствии с договором фирма с целью компенсации потерь от инфляции была обязана в начале каждого квартала повышать сотруднику зарплату на 2%. Однако в связи с финансовыми затруднениями она смогла повышать ему зарплату только раз в полгода (в начале следующего полугодия). На сколько процентов фирма должна повышать зарплату каждые полгода, чтобы 1 января следующего года зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренном договором?

249. Банк предлагает клиентам два вида вкладов. Первый «До востребования» со следующим порядком начисления процентов: каждые 6 месяцев счет увеличивается на 10% от суммы, имеющейся на счету клиента в момент начисления. Второй вклад «Номерной» с ежегодным начислением процентов по вкладу. Сколько процентов годовых должен начислять банк по второму вкладу, чтобы равные суммы, положенные клиентом на каждый из указанных счетов, через два года оказались снова равными?

250. По сберегательному вкладу банк выплачивает 12% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 10 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

251. По накопительному вкладу банк выплачивает 20% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 5000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

252. По долгосрочному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 20 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

253. По стандартному вкладу банк выплачивает 8% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 25 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

254. По вкладу «Доходный» банк выплачивает 14% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

255. По накопительному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 100 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

256. По пенсионному вкладу банк выплачивает 18% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 5000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

257. Цену товара дважды повышали: первый раз на р%, затем новую цену повысили на 2р%. После этого цену товара снизили на 15%. В итоге окончательная цена оказалась выше первоначальной на 12,2%. На сколько процентов была повышена цена товара в первый раз?

258. В результате колебания цен на рынке цена пакета акций сначала понизилась на р%, затем поднялась на 20%, а затем снизилась на 2р%. В итоге начальная цена пакета акций снизилась на 13,6%. На сколько процентов понизилась цена пакета акций во второй раз?

259. Цену товара дважды повышали: первый раз на р%, затем новую цену повысили на (р+5)%. После этого цену товара снизили на 20%. В итоге окончательная цена оказалась выше первоначальной на 20%. На сколько процентов была повышена цена товара во второй раз?

260. В результате колебания цен на рынке цена пакета акций сначала понизилась на некоторое число процентов, затем поднялась на 20%, а затем снова снизилась, причем второе снижение цены было на 5% меньше первого. В итоге начальная цена пакета акций снизилась на 28%. На сколько процентов понизилась цена пакета акций во второй раз?

261. После покупки пакета акций владелец разделил его на две неравные части. Акции первой части он продал на 10%, а акции второй — на 20% дороже их первоначальной цены. В результате его прибыль составила 13%. Сколько процентов всех акций составила первая часть пакета?

262. После покупки пакета акций владелец разделил его на две неравные части. Акции первой части он продал на 10% дороже, а акции второй — на 10% дешевле их первоначальной цены. В результате его прибыль составила 2,8%. Сколько процентов всех акций составила вторая часть пакета?

263. После покупки пакета акций владелец разделил его на две неравные части. Акции первой части он продал на 15%, а акции второй — на 20% дороже их первоначальной цены. В результате его прибыль составила 18%. Сколько процентов всех акций составила первая часть пакета?

264. К 10 литрам 45%-ного водного раствора кислоты добавили некоторое количество чистой воды, в результате чего концентрация кислоты в растворе снизилась до 37,5%. Какое количество воды было добавлено?

265. К 9 литрам водного раствора кислоты добавили 3 литра чистой воды. Смесь тщательно перемешали, а затем такое же количество, т.е. 3 литра, отлили. Операцию повторили трижды, после чего концентрация кислоты составила 27%. Какова исходная концентрация кислоты в растворе?

266. К 8 литрам водного раствора кислоты добавили 4 литра 27-процентного раствора той же кислоты. Смесь тщательно перемешали, а затем такое же количество, т.е. 4 литра, отлили. Операцию повторили трижды, после чего концентрация кислоты составила 43%. Какова была исходная концентрация кислоты в растворе?

1.5.2. Соотношения между величинами

267. Насос может выкачать из бассейна 1/3 воды за 10 мин. Проработав 0,25 ч, насос остановился. Найдите вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 40 м^3 воды.

268. Велосипедист проехал расстояние между двумя поселками за 3 дня. В первый день он проехал 1/6 всего пути и еще 50 км, во второй 1/5 всего пути и еще 15 км, а в третий день 1/20 всего пути и оставшиеся 70 км. Найдите расстояние между поселками.

269. Вкладчик сначала снял со своего счета в сбербанке 1/5 своих денег, потом 5/16 оставшихся и еще 999 руб. После этого у него осталось на сберкнижке 1/4 всех денег. Каким был первоначальный вклад?

270. Группа школьников совершила поход во время летних каникул. Первые 50 км они проплыли на байдарках, 1/5 оставшейся части маршрута прошли пешком, а затем опять плыли на байдарках. В итоге на байдарках проплыли в 3 раза больше, чем прошли пешком. Какова длина всего маршрута?

271. Насос может выкачать из бассейна 5/6 воды за 4 ч 15 мин. До полудня насос работал 4,5 ч, после чего осталось выкачать еще 80 м^3. Найдите объем бассейна.

272. На выпускном экзамене по математике 1440 школьников решили задачи с ошибками, 320 школьников, сдававших экзамен в этот день, не решили ни одной задачи, а число школьников, решивших все задачи правильно, относится к числу не решивших ни одной задачи, как 5 : 3. Сколько школьников экзаменовалось по математике в этот день?

273. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 61. Если от этого двузначного числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

2. Уравнения и неравенства

2.1. Уравнения

2.1.1. Иррациональные уравнения

274. Решите уравнение: $x-2\sqrt{x+2}+3=0$.

275. Решите уравнение: $\sqrt{x+4}-x+2=0$.

276. Решите уравнение: $4+\sqrt{3x+16}=x$.

277. Решите уравнение: $x+\sqrt{3x+7}=7$.

278. Решите уравнение: $\sqrt{15-3x}-x=1$.

279. Решите уравнение: $\sqrt{12x^2+7x-10}-5=4x$.

280. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+8}-1=2x$.

281. Решите уравнение: $5+\sqrt{0{,}5x^2-4{,}5x+11}=x$.

282. Решите уравнение: $\sqrt{4-6x-x^2}-x=4$.

283. Решите уравнение: $\sqrt{37-x^2}+5=x$.

284. Решите уравнение: $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$.

285. Решите уравнение: $\sqrt{x+21}=x+1$.

286. Решите уравнение: $\sqrt{2x+3}=x$.

287. Решите уравнение: $\sqrt{2-x}=x+10$.

288. Решите уравнение: $\sqrt{4-2x}=2x+2$.

289. Решите уравнение: $\sqrt{3x+4}=x-2$.

290. Решите уравнение: $\sqrt{3+6x}=x+2$.

291. Решите уравнение: $\sqrt{15-2x}=x$.

292. Решите уравнение: $\sqrt{x-3}=3-x$.

293. Решите уравнение: $\sqrt{3-2x}=x-\dfrac{3}{2}$.

294. Решите уравнение: $\sqrt{5x+11}=5-x$.

295. Решите уравнение: $\sqrt{1+3x}=1-x$.

296. Решите уравнение: $\sqrt{x+3}-1=x$.

297. Решите уравнение: $(x-7)^{\frac{3}{2}}-12(x-7)+48\sqrt{x-7}-64=0$.

298. Решите уравнение: $\sqrt{(x\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1)}=x^2+4x+4$.

299. Решите уравнение: $1+\dfrac{6}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$.

300. Решите уравнение: $\dfrac{1}{x}-5+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=0$.

2.1.2. Тригонометрические уравнения

301. Решите уравнение: $\sin x\cdot\cos x-\sin x+3\cos x-3=0$.

302. Решите уравнение: $\sin^2 y-\sin y-2=0$.

303. Решите уравнение: $\cos^2 x+\sin x+1=0$.

304. Найдите все решения уравнения $(\sin^2 x+1)\cos x=2-\cos^2 x$.

305. Найдите все решения уравнения $(\sin x\cdot\operatorname{ctg} x-1)^2-\cos^2 x=0$.

306. Найдите все решения уравнения
$\sin x(1+\cos^2 x)=\cos x(\operatorname{ctg}^2 x\cdot\sin^2 x+1)$.

307. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

308. Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 x+1=\dfrac{1}{\sin x}$.

309. Найдите все решения уравнения $\sin x=\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

310. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^3 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg} x$.

311. Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 x-\sin x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-2$.

312. Решите уравнение: $2\frac{2}{3}+\frac{1}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\cos^2 2x}=0$.

313. Укажите число корней уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ на промежутке $[0; 3\pi]$.

314. Укажите число корней уравнения $2\mathrm{tg}x\cos^2 x + \cos 2x = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

315. Укажите число корней уравнения $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0$ на промежутке $[-7\pi; 6\pi]$.

316. Укажите число корней уравнения $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2$ на промежутке $[0; 3\pi]$.

317. Укажите число корней уравнения $2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$ на промежутке $[0; \pi]$.

318. Укажите число корней уравнения $\cos 6x + \sin 6x \cdot \mathrm{tg}\, 3x + \sin 6x = 1$ на промежутке $[0; \pi]$.

319. Укажите число корней уравнения $\frac{2\mathrm{tg}3x}{\sin 6x}-\cos 6x=\mathrm{tg}^2 3x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$.

320. Укажите число корней уравнения $\sin 2x + 4\cos x - 2\sin x - 4 = 0$ на промежутке $[0; 5\pi]$.

321. Укажите число корней уравнения $\sin 6x \cdot \mathrm{ctg}\, 3x - \cos 6x = \sin 5x$ на промежутке $[0; \pi]$.

322. Укажите число корней уравнения $\cos^4 2x - \sin^4 2x - \cos 4x = \mathrm{tg}\, 3x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$.

2.1.3. Показательные уравнения

323. Решите уравнение: $2^{x^2-1}\cdot 3^x+6\cdot 2^{x^2-1}-3^x-6=0$.

324. Решите уравнение: $7^{x-5}\cdot 5^{x^2}-49\cdot 5^{x^2}+3\cdot 7^{x-5}-147=0$.

325. Решите уравнение: $\frac{2^{x+3}-1}{7}=\frac{4}{2^{x+2}}$.

326. Решите уравнение: $10^{x^2+1}-15-10^{1-x^2}=0$.

327. Решите уравнение: $9^{\sqrt{x-2}} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} = 18$.

328. Решите уравнение: $e^{3x} + e^{x} - 2 = 0$.

329. Решите уравнение: $\dfrac{2^x - 1}{2^{2x} + 2^x - 3} = 1$.

330. Решите уравнение: $\left(\dfrac{3}{7}\right)^x + \left(\dfrac{4}{7}\right)^x = 1$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

331. Решите уравнение: $3^x + 2^x = 5^x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

332. Решите уравнение: $2^x + \left(\sqrt{5}\right)^x = 3^x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

2.1.4. Логарифмические уравнения

333. Решите уравнение:
$\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3\log_2(x^2 - 5) - 2\log_3^2(7 - x) - 6 = 0$.

334. Решите уравнение: $\lg^2 x + 2\log_{100} x - 6 = 0$.

335. Решите уравнение: $\log_2(x + 1) + \dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 30$.

336. Решите уравнение: $\dfrac{1}{\log_2 x} + \log_2 x^4 = 4$.

2.1.5. Уравнения, содержащие модули

337. Решите уравнение: $\sqrt{x} = |x - 4| + 2$.

338. Решите уравнение: $\lg(x - 1) = |x - 101| + 2$.

339. Решите уравнение: $\sqrt{x} - |x - 6| = 0$.

340. Решите уравнение: $4x - |x - 2| - 3 = 0$.

341. Решите уравнение: $\cos^2 x + |\cos x| - 2 = 0$.

342. Решите уравнение: $\sin^2 x + |\sin x| - 2 = 0$.

343. Решите уравнение: $\sin^2 x - |\cos x| + 1 = 0$.

344. Решите уравнение: $\cos^2 x - |\sin x| + 1 = 0$.

345. Решите уравнение: $\dfrac{2}{1+\mathrm{tg}^2 x} + |\cos x| - 1 = 0$.

346. Решите уравнение: $\dfrac{2}{1+\mathrm{ctg}^2 x} + |\sin x| - 1 = 0$.

2.1.6. Смешанные уравнения

347. Решите уравнение: $\cos x - 1 = x^2$.

348. Решите уравнение: $3^x = (x-1)^2 + 3$.

349. Решите уравнение: $0{,}1^{2x+1} = \sqrt{103+3x}$.

350. Решите уравнение: $0{,}3^{x+1} = \sqrt{2+x}$.

351. Решите уравнение: $3^{4-x} = \sqrt{x-3}$.

352. Решите уравнение: $0{,}1^{-x} = \sqrt{x+1}$.

353. Решите уравнение: $(0{,}25)^{2-x} = \sqrt{19-x}$.

354. Решите уравнение: $(0{,}5)^{x-1} = \sqrt{x}$.

355. Решите уравнение: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{x+3} = \sqrt{10+3x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

356. Решите уравнение: $3^{1-2x} = \sqrt{x+9}$.

357. Решите уравнение: $(0{,}1)^{1-x} = \sqrt{2-x}$.

358. Решите уравнение: $0{,}2^{3-2x} = \sqrt{27-x}$.

359. Решите уравнение: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+1} = \sqrt{2+x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

360. Решите уравнение: $5^{1-x} = \sqrt{x}$.

361. Решите уравнение: $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{x+2} = \sqrt{\frac{1}{3}(5+x)}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

362. Решите уравнение: $2^{-x-2} = \sqrt{\frac{1}{5}(2x+9)}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

363. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) = \sqrt{x-3}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

364. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{25}\right)^2 = \sqrt{4x-16}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

365. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x}{7}-2\right)^2 = \sqrt{4x-56}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

366. Решите уравнение: $\sin(\frac{\pi}{2}x) - \sqrt{x} = 0$.

367. Решите уравнение: $15^x - \log_7(x+1) - 1 = 0$.

368. Найдите сумму корней уравнения $\left(2^{4x^2-7} - 4\right)\sqrt{x+1} = 0$.

369. Найдите сумму корней уравнения $\left(4^{4x^2-3} - 4\right)\sqrt{x+0,5} = 0$.

370. Найдите сумму корней уравнения $\left(3^{x^2-2} - 9\right)\log_2 x = 0$.

371. Найдите сумму корней уравнения $\left(3^{2x^2-1} - 2187\right)\ln(x+2) = 0$.

372. Найдите сумму корней уравнения $\left(2^{3x^2-2} - 2\right)\sqrt[6]{x+0,5} = 0$.

373. Найдите сумму корней уравнения $\left(5^{x^2+2} - 125\right)\sqrt[4]{x}\ln(x-0,5) = 0$.

374. Найдите сумму корней уравнения $\left(6^{x^2+1} - 36\right)\sqrt[6]{x} = 0$.

375. Найдите сумму корней уравнения $\left(3^{2x^2+2}-59049\right)\sqrt{x+1}=0$.

376. Найдите сумму корней уравнения $\left(2^{4x^2-7}-0{,}125\right)\sqrt[6]{x}=0$.

377. Найдите сумму корней уравнения $(5^{x^2}-625)\sqrt{x}$.

378. Найдите все решения уравнения

$(x^2+1)\cos x=\frac{1}{2}(x^2+\sin^2 x+\cos^2 x)$.

379. Найдите все решения уравнения $((\log_2 x)^2+1)\cos^2 x=1+\frac{1}{(\log_x 2)^2}$.

380. Решите уравнение: $10^{50+\lg x}-x^{\frac{1}{3}(\lg x+8)}=0$.

381. Решите уравнение: $x^2-10x\lg x=0$.

382. Решите уравнение: $\log_3(9^x-6)-\log_3(2\cdot 3^x-3)=0$.

383. Решите уравнение: $\sqrt{1+\log_2 x}=5-\log_2 x$.

384. Решите уравнение: $\sqrt{4\log_2\sqrt{x}+17}=1+\frac{1}{\log_x 2}$.

385. Решите уравнение: $\sqrt{\log_x\left(64x^{25}\right)}=3\left(\log_x\sqrt[3]{2}+1\right)$.

386. Решите уравнение: $\sqrt{\log_5 x^6+13}=\frac{1}{\log_x 5}+3$.

387. Решите уравнение: $\sqrt{\frac{6}{\log_{16} x}+\log_{\sqrt{x}} x^5}=\frac{1}{\log_{16x^3} x}$.

388. Решите уравнение:

$\frac{1}{\log_x 3}+1=\sqrt{\log_9 x^4+10}$.

389. Решите уравнение: $\sqrt{1-\cos^2 x}=2\cos^2 x-1$.

390. Решите уравнение: $\cos^2 x+2\sqrt{1-\sin^2 x}=0$.

391. Решите уравнение: $\sin^2 x-2+\sqrt{1-\cos^2 x}=0$.

2.1.7. Параметрические уравнения повышенной сложности

392. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнению $(2x-a-2)\log_{x+a+1}(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12})=0$ удовлетворяют ровно два различных значения переменной x.

393. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнению $(2x-a-2)\log_{x+a+1}(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12})=0$ удовлетворяет ровно одно значение переменной x.

394. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения $(2x-a-2)\log_{x+a+1}(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12})=0$ принадлежит отрезку $[2;5]$.

395. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственное значение переменной x, удовлетворяющее уравнению $(2x-3a)\log_{a+2-x}(\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8})=0$.

396. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2x-3a)\log_{a+2-x}(\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8})=0$ не имеет решений.

397. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнению $(2x-3a)\log_{a+2-x}(\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8})=0$ удовлетворяют два различных значения переменной x.

398. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения $(2x-3a)\log_{a+2-x}(\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8})=0$ принадлежат отрезку $[\frac{1}{2};\ 2]$.

399. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнению $(x-1)\log_{x+a+1}(\frac{3ax-a-a^2+1}{2x^2-x+1})=0$ удовлетворяет ровно одно значение переменной x.

400. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнению $(x-1)\log_{x+a+1}(\frac{3ax-a-a^2+1}{2x^2-x+1})=0$ удовлетворяет ровно два различных значения переменной x.

401. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения $(x-1)\log_{x+a+1}(\frac{3ax-a-a^2+1}{2x^2-x+1})=0$ принадлежат отрезку $[2;\ 4]$.

2.2. Системы уравнений

2.2.1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

402. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2. \end{cases}$

Найдите x_0-y_0.

403. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x-2y=2 \\ x+y=2. \end{cases}$

Найдите x_0-y_0.

404. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=2. \end{cases}$

Найдите x_0-y_0.

405. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x+y=4. \end{cases}$

Найдите x_0-y_0.

406. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+y=2. \end{cases}$

Найдите x_0-y_0.

407. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=1. \end{cases}$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

408. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

Найдите $x_0 : y_0$.

409. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

410. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 3. \end{cases}$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

411. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

412. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

413. Пусть (x_0, y_0) — решение системы уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

Найдите $x_0 - y_0$.

414. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 4? \end{cases}$

415. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4? \end{cases}$

416. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 2? \end{cases}$

417. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 2y = 5? \end{cases}$

418. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2? \end{cases}$

419. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=2? \end{cases}$

420. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=3? \end{cases}$

2.2.2. Системы квадратных уравнений

421. Решите систему уравнений $\begin{cases} y-x^2=17-8x \\ \dfrac{1}{3}(y+1)+8x=x^2+16. \end{cases}$

2.2.3. Системы иррациональных уравнений

422. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-2}+5=y \\ y^2-10\sqrt{x-2}=2x+5. \end{cases}$

423. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{y+3}-7=x \\ 2y-2x^2=8. \end{cases}$

424. Пусть (x_0, y_0) — решение системы

$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}-y=1. \end{cases}$ Найдите частное $\dfrac{x_0}{y_0}$.

425. Пусть (x_0, y_0) — решение системы

$\begin{cases} y-2=\sqrt{x} \\ \sqrt{x-3}=y-3. \end{cases}$ Найдите значение выражения $x_0^2+y_0^3$.

2.2.4. Системы тригонометрических уравнений

426. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x-2\sin^2 y\cdot\cos^2 y=1 \\ \sin^4 y+\cos^4 y+\sin x-1=\cos y. \end{cases}$

2.2.5. Системы показательных уравнений

427. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^x=725+2^y \\ 25+2^{0,5\cdot y}-3^x=0. \end{cases}$

428. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x = \dfrac{1-2^y}{2^y-5} \\ 2^y = \dfrac{3^{x+1}-1}{3^x-1}. \end{cases}$

429. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x = \dfrac{2\cdot 3^y+2}{1-3^y} \\ 3^y = \dfrac{2^x+3}{5\cdot 2^x+1}. \end{cases}$

2.2.6. Системы логарифмических уравнений

430. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5 \\ \log_9 x + \log_3 y = 7. \end{cases}$

431. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\log_{36} y + \log_6(10y + x + 1) = 1 \\ \ln(x + 5y + 1) = 0. \end{cases}$

432. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\log_{49}(-y) + \log_7(x - 4y - 5) = 1 \\ \log_{11}(x - 2y + 1) = 0. \end{cases}$

2.2.7. Смешанные системы уравнений

433. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin y - x + 2 = 0 \\ x^2 = 6\sin y + 7. \end{cases}$

434. Решите систему уравнений $\begin{cases} 36^{xy} + 2\cdot 6^{xy} = 48 \\ \dfrac{1}{x} + 2y = 6. \end{cases}$

435. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 63. \end{cases}$

436. Решите систему уравнений $\begin{cases} 0,5\cdot y - 1 = \sqrt{x-2} \\ y + 4x = x^2 + 6. \end{cases}$

437. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} y + 1 = \sqrt{x^2 + 6x + 9} \\ y + x = 0. \end{cases}$

Найдите значение выражения $x_0 y_0 (x_0 + y_0)$.

438. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} \sqrt{x-3} = y+2 \\ x+y-3=0. \end{cases}$

Найдите значение выражения $\sqrt{x_0} - y_0$.

439. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} y+1 = \sqrt{x^2+4x+4} \\ y = 3x+5. \end{cases}$

Найдите произведение x_0y_0.

440. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} y+1 = \sqrt{x^2+4x+4} \\ 2x-y+6=0. \end{cases}$

Найдите произведение x_0y_0.

441. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} 2y+5 = \sqrt{4x^2+12x+9} \\ x+y=5. \end{cases}$

Найдите $x_0 - y_0$.

442. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} 3y-2 = \sqrt{9x^2-6x+1} \\ y-4=2x. \end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

443. Пусть (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} y-5 = \sqrt{x^2+6x+9} \\ y=2x-3. \end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

444. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} 2y-3 = \sqrt{25x^2-70x+49} \\ y-x=1. \end{cases}$

Найдите значение выражения x_0y_0.

445. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x = \dfrac{3y+1}{y-4} \\ y = \dfrac{3 \cdot 2^x - 8}{2^x+1}. \end{cases}$

446. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x = \dfrac{2y+2}{1-y} \\ y = \dfrac{2^x+3}{5 \cdot 2^x+1}. \end{cases}$

447. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x = \dfrac{y+3}{5y+1} \\ y = \dfrac{2 \cdot 3^x + 2}{1 - 3^x}. \end{cases}$

448. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x = \dfrac{1-y}{y-5} \\ y = \dfrac{3^{x+1} - 1}{3^x - 1}. \end{cases}$

449. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{1 - 2^y}{2^y - 5} \\ 2^y = \dfrac{3x-1}{x-1}. \end{cases}$

2.2.8. Параметрические системы уравнений повышенной сложности

450. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел (a; b), таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2 \end{cases}$ не имеет решения.

451. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел (a; b), таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = \pi^2 k^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

452. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел (a; b), таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x-a| + |y-b| = k \end{cases}$ не имеет решения.

453. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел (a; b), таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x-a| + |y-b| = k \end{cases}$ имеет ровно два решения.

454. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел (a; b), таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x-a| + |y-b| = k \end{cases}$ имеет ровно три решения.

455. Найдите все натуральные значения параметра k, при котором система уравнений $\begin{cases} \cos x \cos y \cos(x+y) + \dfrac{1}{8} = 0 \\ |x| + |y| + |y - kx - \pi| = x(1+k) + \pi \end{cases}$ имеет решение.

2.3. Неравенства

2.3.1. Квадратные неравенства

456. Решите неравенство $(x^2 + x - 6)(x - 5) \geq 0$.

457. Решите неравенство $(x^2 + 11x + 28)\,(x^2 - 14x + 48) \leq 0$.

2.3.2. Рациональные неравенства

458. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{8-x}{7x-14} \geq 0$.

459. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{x+3}{9-2x} \geq 0$.

460. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{x+2}{7-x} \geq 0$.

461. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{x-2}{6-x} \geq 0$.

462. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{3-x}{x-1} \geq 0$.

463. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{2-x}{2x-8} \geq 0$.

464. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{3-x}{14-2x} < 0$.

465. Определите число целых решений неравенства $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$.

466. Определите число целых решений неравенства $\frac{3x+3}{2-x} \geq 0$.

467. Определите число целых решений неравенства $\frac{4-2x}{x-4} > 0$.

468. Решите неравенство: $\frac{x^2-2x-63}{x^2+4x-77} \geq 0$.

469. Решите неравенство: $\frac{(x^2+8x-65)(x+3)}{x-8} \leq 0$.

470. Решите неравенство: $\frac{x^2-5x+6}{x+1} \leq 0$.

471. Решите неравенство: $\frac{x^2+2x-3}{x+4} \geq 0$.

472. Решите неравенство: $\frac{x-3}{x^2+x-2} \leq 0$.

473. Решите неравенство: $\frac{4-x^2}{3x-1} \leq 0$.

474. Решите неравенство: $\frac{(1-x)(1-3x)}{(4x+3)} < 0$.

475. Решите неравенство: $\frac{(2-x)(5x+6)}{(2x+5)} \geq 0$.

476. Решите неравенство: $\frac{1}{2x+5} \geq \frac{1}{2-x}$.

477. Решите неравенство: $\frac{x(x-3)}{x-7} \geq 0$.

478. Решите неравенство: $\frac{(x-1)(x+6)}{x+11} \leq 0$.

479. Решите неравенство: $\frac{(x-7)(x+11)}{4x+8} \leq 0$.

480. Решите неравенство: $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-3} \geq 0$.

481. Решите неравенство: $\dfrac{(x+2)(x-7)}{x} \leq 0$.

482. Решите неравенство: $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$.

483. Решите неравенство: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} > 0$.

484. Решите неравенство: $\dfrac{x(x+2)}{x+1} \geq 0$.

485. Решите неравенство: $\dfrac{(x+3)}{(x-4)(x-7)} \leq 0$.

486. Решите неравенство: $\dfrac{(x+2)(x+3)}{x-4} \leq 0$.

2.3.3. Показательные неравенства

487. Решите неравенство: $3^{7-x} \geq 9$.

488. Решите неравенство: $2^{\frac{x}{5}-1} \geq 4$.

489. Решите неравенство: $3^{-x-6} \leq \dfrac{1}{9}$.

490. Решите неравенство: $5^{7-2x} \geq 125$.

491. Решите неравенство: $7^{4-2x} \geq 49$.

492. Решите неравенство: $3^{x-4} \leq 27$.

493. Решите неравенство: $5^{3x-9} > 1$.

494. Решите неравенство: $3^{3x+1} \leq 81$.

495. Решите неравенство: $0{,}5^{x+2} \leq 4$.

496. Решите неравенство: $4^{4x+7} \leq 64$.

497. Решите неравенство: $27^{\frac{2}{3}(x-2)} + 3^4 - 3^{2(x-1)} < 73$.

498. Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{6x-21}\cdot(3,5)^{4x+1}\geq 1$.

499. Решите неравенство: $81^x-10\cdot 9^{x+1}+729<0$.

2.3.4. Логарифмические неравенства

500. Решите неравенство: $\log_\pi x+\log_\pi 2+\log_\pi(8-x)>\log_\pi(x+27)$.

501. Решите неравенство: $0,5(1+\log_3 x)-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)>\log_3 5x$.

502. Решите неравенство: $\lg 10x<\lg 10^{\lg(x^2+21)}$.

503. Решите неравенство: $\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{1}{3}$.

2.3.5. Смешанные неравенства

504. Решите неравенство: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{8+x}-16}{x^2+3x+9}<0$.

505. Решите неравенство: $5^x-4\leq(x-2)^2$.

506. Решите неравенство: $3^{x-2}<1+\sqrt{x+1}$.

2.3.6. Параметрические неравенства повышенной сложности

507. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)}\left(\log_{11}\left(\left|2x^2+2ax-7\right|+2\right)\right)\leq 0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку $[-4; 2]$.

508. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{7\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)}\left(\log_{11}\left(\left|x^2+2ax+2\right|+2\right)\right)\geq 0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку $[-1; 7]$.

509. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{8\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)}\left(\lg\left(\left|x^2+ax-4\right|+2\right)\right)\geq 0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку $[-6; 2]$.

510. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}}\left(5x^2+ax+3\right)>0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку [0; 1].

2.4. Системы неравенств

2.4.1. Системы рациональных неравенств

511. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x-7}{2x-3}<1; \\ \dfrac{x+4}{2x-3}<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2.4.2. Смешанные системы неравенств

512. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+3>4x; \\ \log_3(x^2-4x+3)\le\log_3 8. \end{cases}$

513. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9\cdot 3^x-\dfrac{1}{27}\ge 0; \\ x^2-5x-84\ge 0. \end{cases}$

514. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3+x}-25>0; \\ x^2+2x-99\le 0. \end{cases}$

3. Функции

3.1. Область определения функции

515. Найдите область определения функции $y = \log_3 \dfrac{7+x}{x-3}$.

516. Найдите область определения функции $y = \log_7(x^2 - 8x + 15)$.

517. Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{x-1}{x+3}} 2$.

518. Найдите область определения функции $y = \log_{3,75}(x^2 - x - 2)$.

519. Найдите область определения функции $y = \dfrac{3^x}{2^{2x} - 2^x - 2}$.

520. Найдите область определения функции $y = \log_3 \dfrac{x-4}{3-6x}$.

521. Найдите область определения функции $y = \log_7 \dfrac{3+x}{x-3}$.

522. Найдите область определения функции $y = \log_6 \dfrac{x-6}{2x+10}$.

523. Найдите область определения функции $y = \log_7 \dfrac{3+x}{4-x}$.

524. Найдите область определения функции $y = \log_3 \dfrac{x-3}{5+x}$.

525. Найдите область определения функции $y(x) = \log_2 (\sin (2x + 5))$.

526. Найдите область определения функции $y(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{(2-x)(2+x)}+\frac{1}{x-1}}$.

527. Найдите область определения функции $y(x) = 7^{\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}}$.

528. Найдите область определения функции

$$y(x) = \sqrt{-\log_7 (\log_3 \frac{x+1}{x-1})}.$$

529. Найдите область определения функции

$$y(x)=\log_3\left(\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}\right).$$

530. Найдите область определения функции $y=\dfrac{3^x}{2^{2x}-2^x-2}$.

531. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{1-\log_2 x}{2+x^4}}$.

532. Найдите область определения функции $y=\sqrt[6]{\dfrac{2x^2+3}{3-\log_5 x}}$.

533. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{(x^2+5)(\log_2 x+1)}$.

534. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{(3+x^2)(2-\log_7 x)}$.

535. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{(x^2+4)(3-\log_2 x)}$.

536. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{\left(5+\log_2\dfrac{1}{x}\right)(x^2+1)}$.

537. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{(x^2+2)\left(2+\log_5\frac{1}{x}\right)}.$$

538. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt[6]{(x^2+2x+15)\left(3+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x}\right)}.$$

539. Найдите область определения функции $y=\sqrt[8]{\dfrac{x^2+x+10}{2+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}}}$.

540. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\ln(x-2|x-2|)$.

541. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\ln(2x-3|x-3|)$.

542. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{x-4|x-6|}$.

543. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{x-3|x-2|}$.

544. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt[4]{2x-7|x-1|}$.

545. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln(x - |2x - 6|)$.

546. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln(4 - |x - 3|)$.

547. Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{\ln\left(2x-|3x-6|\right)}$.

548. Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt[5]{\lg\left(3x-|4x-4|\right)}$.

549. Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{\lg\left(3x-|4x-3|\right)}$.

3.2. Множество значений функции

550. Найдите множество значений функции $y = \cos^2 x + 3$.

551. Найдите множество значений функции $y = \log_2(x - 3) + \log_2(x - 2)$.

552. Найдите множество значений функции $y = e^{x^2+1}$.

553. Найдите множество значений функции $y=2^{\sqrt{x}}-1$.

554. Найдите множество значений функции $y = 2^{\sin x} - 1$.

555. Найдите множество значений функции $y = 4 - \cos x$.

556. Найдите множество значений функции $y = 1 + 5\cos x$.

557. Найдите множество значений функции $y = 3 - 4\cos x$.

558. Найдите множество значений функции $y = 2 - 4\cos x$.

559. Найдите множество значений функции $y = 2\sin x + 5$.

560. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{(x^2-4x+4)^3} + |x+2,5|$, если $-1,3 \le x \le 1,7$.

561. Найдите значение выражения $|x-3,5| + \sqrt[4]{(9+6x+x^2)^2}$, если $-2,8 < x < 3,2$.

562. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{(x^2-10x+25)^5} + |x-1,5|$, если $1,8 \le x \le 4,3$.

563. Найдите значение выражения $|x-1,8| + \sqrt[8]{(x^2+4x+4)^4}$, если $-1,8 \le x \le 1,5$.

564. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{(x^2+2x+1)^3} + |x+3,8|$, если $-2,8 < x \le -1,5$.

565. Найдите значение выражения $|x+1,5| + \sqrt[10]{(x^2+8x+16)^5}$, если $-3,8 < x < -2,3$.

566. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{(25+10x+x^2)^3} + |x+2,2|$, если $-4,2 \le x < -2,5$.

567. Найдите значение выражения $|x+3,8| + \sqrt[4]{(x^2-2x+1)^2}$, если $-3,5 < x \le 0,5$.

568. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{(x^2-6x+9)^5} + |x+3,2|$, если $-2,7 \le x \le 2,5$.

569. Найдите значение выражения $|x-0,5| + \sqrt[4]{(16-8x+x^2)^2}$, если $1,8 < x < 3,9$.

3.3. Нули функции

570. Найдите нули функции $y = \sqrt[4]{x^5-3x^3+8} + \sqrt{\lg(x^2-x-5)}$.

571. Найдите нули функции $y = \sqrt[6]{x^4+3x^3+8} + \arcsin^2(x^2+2x)$.

572. Найдите нули функции $y=\sqrt{x^3-5x+12}+\log_4^4(x^2+x-5)$.

573. Найдите нули функции $y=\operatorname{arctg}^2(3x-x^2)+\sqrt[8]{x^5-2x^4-80}$.

574. Найдите нули функции $y=\ln^6(x^2-2x-14)+\sqrt{x^4+2x^3-27}$.

575. Найдите нули функции $y=\arcsin^4(x^2+2x-3)+\sqrt[4]{x^3+x^2+18}$.

576. Найдите нули функции $y=\sqrt{x^3+4x^2+25}+6\ln^6(x^2+4x-4)$.

577. Найдите нули функции $y=\sqrt[6]{x^3+3x^2+16}+\operatorname{arctg}^2(x^2+x-12)$.

578. Найдите нули функции $y=\sqrt[4]{x^3-23x-10}+\sqrt{\log_\pi(x^2-5x+1)}$.

579. Найдите нули функции $y=\sqrt[8]{x^4+5x^3+64}+\arcsin^2(x^2+4x)$.

3.4. Промежутки возрастания и убывания функции

580. Сколько промежутков убывания у функции
$y=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+1$, заданной на всей числовой оси?

581. Сколько промежутков возрастания у функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, заданной на отрезке [0; 2]?

3.5. Четность и нечетность функции

582. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(2x+1)(x-3)(x+2)$. Найдите значение $h(-1)$ функции $h(x)=\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)+2g(x)}$.

583. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=2x(x+4)\times$ $\times(2x-1)$. Найдите значение $h(-1)$ функции $h(x)=\frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)+g(x)}$.

584. Нечётная функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-7; 7]$. Для всякого неотрицательного значения переменной $x \in [-7; 7]$ значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x-3)\times$ $\times(x-2)(x+5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

585. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $(-4; 4)$. Для всякого неотрицательного значения переменной $x \in (-4; 4)$ значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+3)\times$ $\times(x-4)(2x-7)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

586. Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x+3)(x-1)(x-3)$. Найдите значение $h(2)$ функции $h(x) = \dfrac{f(x)-4g(x)}{f(x)+4g(x)}$.

587. Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+2)(2x-5)$. Найдите значение $h(2)$ функции $h(x) = \dfrac{5f(x)+g(x)}{f(x)-5g(x)}$.

588. Чётная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-6; 6]$. Для всякого неотрицательного значения переменной $x \in [-6; 6]$ значение этой функции совпадает со значением функции $y = f'(x)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

589. Чётная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $(-3; 3)$. Для всякого неотрицательного значения переменной $y = f(x)$ значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x-3)\times$ $\times(x-3)(x-5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

590. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 7)$. Для всякого неположительного значения переменной x из указанного промежутка значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x-4)(3x+20)(x+5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

591. Чётная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 5]$. Для всякого неположительного значения переменной $f(x) = x^2 \ln x$ значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x-2)(x-1)(x+5)(2x+9)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

592. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+3)\times \times (x-2)(2x-1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

593. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = = (x-1)\cdot x(x+2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

594. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = = (x-1)(x+2)(x-5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

595. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = = x(x-1)(x+3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

596. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = = x(x+1)(x+2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

597. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+2)\times \times (x-1)(x-2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

598. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = = x(x+2)(x+3)(x-8)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

599. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x + 2) \times$ $\times (x - 3)(x + 4)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

600. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) =$ $= (x-3)(x+2)(x-1)(x+18)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

601. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) =$ $= (x+3)x(x+1)(x+2)(x-2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

3.6. Наибольшее и наименьшее значение функции

602. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 2\sqrt{9\sin^2 x + 6\sin x + 13}$.

603. Найдите наименьшее целое значение функции
$y = 3\sqrt{4 - 2\cos x - \cos^2 x}$.

604. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 7\sqrt{1 + 4\sin x\cos x}$.

605. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \sqrt{\cos x - \sin^2 x + 6}$.

606. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \sqrt{5\cos^2 x + 4\cos x + 3}$.

607. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 0{,}5 \cdot \sqrt{10 + 6\cos x + 9\cos^2 x}$.

608. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \frac{2}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 16\sin x + 17}$.

609. Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \frac{1}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 40\sin x + 44}$.

610. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=2,5\sqrt[3]{16\sin^2 x+24\sin x+24}$.

611. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{40-60\cos x+25\cos^2 x}$.

612. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=-33\cdot 0,5^{3-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

613. Найдите наименьшее целое значение функции
$y=-59,4\cdot 3^{-2-\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

614. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=-0,3\cdot 4^{2+\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

615. Найдите наименьшее целое значение функции
$y=-27\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2-\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

616. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=-0,1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3-\cos(2x+\pi)}$.

617. Найдите наименьшее целое значение функции
$y=-23,2\cdot 2^{-2+\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

618. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=-4,16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\sin(3x-\pi)}$.

619. Найдите наименьшее целое значение функции $y-1,8\cdot 2^{3-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

620. Найдите наибольшее целое значение функции
$y=-17,6\cdot 4^{-1-\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

621. Найдите наименьшее целое значение функции $y = -25 \cdot 3^{-2+\sin(2x+\pi)}$.

622. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{9}{4^x + 5^x}$ на промежутке [1; 3].

623. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{50}{2^x + 3^x}$ на промежутке $[\frac{1}{2};1]$.

624. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{36}{4^x + 2^x}$ на промежутке [1; 2].

625. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{58}{5^x + 2^x}$ на промежутке [2; 4].

626. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{13}{2^x + 3^x}$ на промежутке [1; 2].

627. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{41}{5^x + 4^x}$ на промежутке [1; 2].

628. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{5}{4^{2x} - 4^{x+0,5} + 2}$ на промежутке [0; 2].

629. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{8}{9^x - 6 \cdot 3^x + 11}$ на промежутке [1; 3].

630. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{27}{2^{2x} - 2^{x+1} + 6}$ на промежутке [0; 3].

631. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{100}{3^x + 4^x}$ на промежутке [2; 8].

632. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 4x + 21$.

633. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = x^2 + 4x - 32$.

634. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 2x + 1)e^x - 4e$ на отрезке $[-1; 1]$.

635. Найдите наибольшее значение функции $y = 0,34e^{-2,25+3x-x^2}$ на отрезке $[0; 2]$.

636. Найдите наименьшее значение функции $y = \ln(x^2 + 5x + 7,25) + 2$ на отрезке $[-3; 0]$.

637. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3e^{-x} - 27e^{-3}$ на отрезке $[0; 3]$.

638. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 \ln x - e^2 + 2$ на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; e\right]$.

639. Найдите наименьшее значение функции $y = e^x - x + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

640. Найдите наименьшее значение функции $y = 7e^{3+x-2x^2} - 10,4$ на отрезке $[0; 1,5]$.

641. Найдите наибольшее значение функции $y = xe^{4x} + 7$ на отрезке $[-1; 0]$.

642. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{1}{x} + \ln x - e$ на отрезке $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

643. Найдите наименьшее значение функции $y = -\frac{\ln x}{x} + e^{-1}$ на отрезке $\left[\sqrt{e}; e^2\right]$.

4. Начала математического анализа

4.1. Производная функции

4.1.1. Производная суммы, разности, произведения, час двух и более функций

644. Найдите производную функции $y(x) = 2\sin x + \cos x - 3$.

645. Найдите производную функции $h(x) = \operatorname{tg} x + 2\sin x$.

646. Найдите производную функции $l(x) = 7^x + e^x - 7$.

647. Найдите производную функции $k(x) = 3 \cdot 2^x + 10^{x \lg e} + 121$.

648. Найдите производную функции $g(x) = 2\log_2 x + \ln x$.

649. Найдите производную функции $q(x) = 2\ln x - 3\log_7 x + 5$.

650. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + 2x^3 - 2^x$.

651. Найдите производную функции $a(x) = 3x^7\log_3 x$.

652. Найдите производную функции $b(x) = \dfrac{x^2 - 7}{\cos x}$.

653. Найдите производную функции $P(x) = \sin(4x + \pi) + 2^{2x + 3}$.

654. Найдите производную функции $y = \sin x + 2x^6$.

655. Найдите производную функции $y = x^2 + x^3 + e^x - 4$.

656. Найдите производную функции $y = \ln x + e^{2x}$.

657. Найдите производную функции $y = 2^x + e^x - \sin x$.

658. Найдите производную функции $y = \dfrac{1}{x} + x^6$.

659. Найдите производную функции $y = -\sin x + x^3$.

660. Найдите производную функции $y = 2x^5 - 3\cos x$.

661. Найдите производную функции $y = 2\sin x - x^5$.

662. Найдите производную функции $y = 3\sin x - x^6$.

663. Найдите производную функции $y = -2\cos x + x^3$.

664. Найдите производную функции $y = \sqrt{2x - 1} - 3\sin x$.

665. Найдите производную функции $y = x^4 - x + 2\cos x$.

666. Найдите производную функции $y = \operatorname{tg} 3x - x^3 + x$.

667. Найдите производную функции $y = e^x - \sqrt{2x}$.

668. Найдите производную функции $y = 0,5\sin 2x - x^2 + 5x$.

669. Найдите производную функции $y = 2\sqrt{x} - \ln(4x)$.

670. Найдите производную функции $y = 0,25x^4 - 0,5x^2 + \cos(0,5x)$.

671. Найдите производную функции $y = \sqrt{2x-1} - 3\sin x$.

672. Найдите производную функции $y = e^{-x} + \operatorname{tg} x$.

4.1.2. Производная сложной функции

673. Найдите производную функции $y(x) = e^{\sin x}$.

674. Найдите производную функции $y(x) = e^{\cos x}$.

675. Найдите производную функции $y(x) = e^{\sin 2x}$.

676. Найдите производную функции $y(x) = e^{\cos 2x}$.

677. Найдите производную функции $y(x) = \ln(\sin x)$.

678. Найдите производную функции $y(x) = \ln(\cos x)$.

679. Найдите производную функции $y(x) = \ln(\sin \frac{x}{2})$.

680. Найдите производную функции $y(x) = \ln(\cos \frac{x}{3})$.

681. Найдите производную функции $y(x) = e^{\sin^2 2x}$.

682. Найдите производную функции $y(x) = e^{\cos^2 3x}$.

683. Найдите производную функции $y(x) = e^{\cos^3 2x}$.

684. Найдите производную функции $y(x) = e^{\sin^4 4x}$.

685. Найдите производную функции $y(x) = \ln(\sin e^{x^2})$.

686. Найдите производную функции $y(x)=\ln(\cos e^{x^2})$.

687. Найдите производную функции $y(x)=\ln(\sin^2 e^x)$.

688. Найдите производную функции $y(x)=\ln(\cos^2 e^x)$.

689. Найдите производную функции $f(x) = 7^{2\cos 2x}$ в точке $x_0 = \pi$.

690. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}\cdot 3^{-\sin 3x}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{18}$.

691. Найдите производную функции $f(x) = e^{x+\cos 5x-5}$ в точке $x_0 = 0$.

692. Найдите производную функции $f(x) = \sin(2^{x^3+2x^2-3})$ в точке $x_0=-1\dfrac{1}{3}$.

693. Найдите производную функции $f(x) = \cos(\sin((3x+5)\cdot\dfrac{\pi}{16}))$ в точке $x_0 = 1$.

694. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{10\ln 5}{\pi}\operatorname{tg}\left(\pi\cdot\log_5(x^2-4)\right)$ в точке $x_0 = 3$.

695. Найдите производную функции
$f(x)=\dfrac{\ln 2\cdot\ln 11}{\sqrt{3}}\log_{11}\left(\log_{13}(\sin 3x)\right)$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{18}$.

696. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\ln(\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{6}(x^2-48)))$ в точке $x_0 = 7$.

697. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{\pi}{3}\cdot\log_7(5^{x^3-2\cos(7-x)})$ в точке $x_0 = 0$.

698. Найдите производную функции
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\dfrac{1}{\ln 9}\cdot 9^{3\cos x^2}+\ln 9\cdot\log_9(3\cos x^2))$ в точке $x_0=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$.

4.1.3. Физический смысл производной

699. При движении тела по прямой расстояние s (в километрах) от начальной точки меняется по закону $s(t)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{4}+2$ (t — время движения в часах). Найдите скорость (км/ч) тела через 1 час после начала движения.

700. При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки меняется по закону $s(t) = t^2 + \ln t + 11$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

701. При движении тела по прямой его скорость v (в м/с) меняется по закону $v(t)=\frac{t^5}{5}-t^3+t+1$ (t — время движения в секундах). Найдите ускорение (м/с^2) тела через 2 секунды после начала движения.

702. При движении тела по прямой его скорость (в м/с) меняется по закону $v(t)=\frac{t^2}{2}+e^t$ (t — время движения в секундах). Найдите ускорение (м/с^2) тела через 1 секунду после начала движения.

703. При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $s(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

704. Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = 3t^2 - 7t + 6$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 6$.

705. Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = t^5 - t^4 + 6$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 2$.

706. Наблюдение за космическим телом показало, что расстояние s (в километрах) между ним и Землей изменяется по закону $s(t)=1{,}8\cdot 10^5+0{,}5\cdot 10^5\sqrt{t}$, где t – время в секундах от момента начала наблюдения. Через сколько секунд после начала наблюдения скорость удаления тела от Земли составит 10^3 км/с ?

707. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $h(t) = 7 + 12t - 9t^2$ (t — время движения в секундах, h — расстояние от Земли до тела в метрах). Определите скорость движения тела в момент $t = 0$.

708. Тело удаляется от поверхности Земли в вертикальном направлении по закону $h(t) = 7 + 14t - 3t^2$ (t — время движения в секундах, h — расстояние в метрах от поверхности Земли до тела). В какой момент времени скорость тела будет равна 2 м/с?

709. Тело движется прямолинейно по закону $x = 25 \cdot \sin(2t)$, где x — координата тела (в метрах), t — время (в секундах). Найдите скорость тела в момент времени $t = 0$ с.

710. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi(t) = 12t - t^2$ радиан. Найдите угловую скорость вращения маховика в момент времени $t = 3$ с.

711. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi(t) = 8t - t^2$ радиан. Через сколько секунд после начала движения угловая скорость вращения маховика будет равна 4 рад/с?

712. Ракета движется прямолинейно по закону $x = 0,25 \cdot e^{4t} + 12$ (где x — расстояние от поверхности Земли в метрах, t — время в секундах). С какой скоростью стартовала ракета?

713. Тело движения прямолинейно s (в метрах) по закону $s = t^3 + 12t + 5$ (где s — путь в метрах, t — время в секундах). В какой момент времени скорость проходки будет равна 15 м/с?

714. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x=t^2+t+1$ (где x — расстояние до начала координат в метрах, t — время в секундах). Определите кинетическую энергию тела ($E_k=mv^2/2$, где m — масса тела, v — скорость движения) в момент времени $t = 5$ с.

715. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $h(t) = 2 + 9t - 4t^2$ (t — время движения в секундах, h — расстояние в метрах от Земли до тела). Определите скорость через 1 секунду после начала движения.

716. Тело удаляется от поверхности Земли в вертикальном направлении по закону $h(t) = -5t^2+18t$ (t — время движения, h — расстояние от поверхности Земли до тела). Через какое время скорость тела будет равна 3?

717. При торможении маховик за время t поворачивается на угол $\varphi(t) = -t^2 + 10t$. Через какое время после начала движения угловая скорость вращения маховика будет равна 4?

718. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 3t^3 + 36t + 12$, где $s(t)$ — координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 45?

719. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $h(t) = -8t^2 + 18t + 13$ (t — время движения, h — расстояние от Земли до тела). Определите скорость в момент времени $t = 1$.

4.1.4. Уравнение касательной к графику функции, геометрический смысл производной

720. Найдите коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции $y = e^x - x - 1$ в его точке с абциссой $x_0 = 0$.

721. Найдите коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \sin x + \cos x$ в его точке с абциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

722. Найдите коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \ln x + \frac{x^3}{3}$ в его точке с абциссой $x_0 = 2$.

723. Найдите коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}$ в его точке с абциссой $x_0 = -1$.

724. Найдите коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции $y = x - 2\sqrt{x}$ в его точке с абциссой $x_0 = 4$.

725. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 7x^3 - 21x^2 + 18$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

726. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.

727. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^3 - 2x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

728. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

729. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

730. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 7x + 12$ в его точке с абсциссой $x_0 = 3$.

731. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = -2x^2 + 3x + 5$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.

732. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = -x^2 + 6x - 4$ в его точке с абсциссой $x_0 = 3$.

733. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 4 - x - 2x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

734. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2 + x + x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

735. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = -x^2 + 4x + 3$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

736. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2x^2+x-1$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

737. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

738. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

739. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2 + 3x - x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

740. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

741. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

742. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2 + 2x - 4x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

743. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 14x - 45 - x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен 2.

744. На графике функции $f(x) = x^2 - 3x + 1$ взята точка А. Касательная к графику, проведенная через точку А, наклонена к оси абсцисс под углом, тангенс которого равен 7,2. Найдите абсциссу точки А.

745. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$, в которой угловой коэффициент касательной равен –8,6.

746. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 4x^2 - 12x - 9$, в которой угловой коэффициент касательной равен 12.

747. Укажите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику $f(x) = 5x - 3x^2 - 2$ в точке с абсциссой, равной 1,5.

748. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$, в которой касательная к нему параллельна прямой $y = -2x + 5$.

749. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \dfrac{x^2}{2} + \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

750. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \ln x + x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

751. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2x + 3e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

752. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = e^x + \dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

753. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 2x + e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

754. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos x + 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4.1.5. Применение производной для нахождения экстремумов функции

755. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 + 3x^2$.

756. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 6x^2$.

757. Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

758. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 - 24x$.

759. Найдите точку минимума функции $y = 3x - 4x^3$.

760. Найдите точку минимума функции $y = x^4 + 32x$.

761. Найдите точку максимума функции $y = 108x - x^4$.

762. Найдите точку минимума функции $y = 3x^4 - 4x^3$.

763. Найдите наибольшее значение функции $y(x) = \ln(e^2 - x^2)$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

764. Найдите наименьшее значение функции $P(x) = \cos^2 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

765. Найдите наименьшее значение функции $q(x) = x^5 e^{5x} + 5$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

766. Найдите точку минимума функции $h(x) = e^{3x+7} \cdot x^3$.

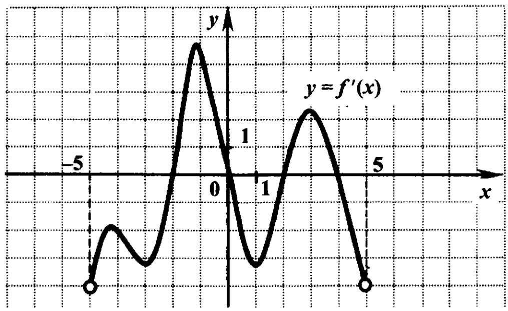
767. Найдите точку минимума функции $k(x) = \frac{2}{3}\cos 3x$ на промежутке $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

768. Найдите точку минимума функции $l(x) = \log_2^2(2x - 5)$.

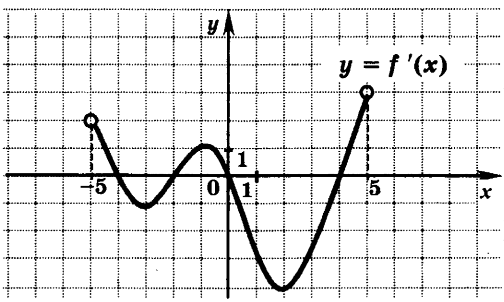
769. Найдите точку минимума функции
$b(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)$.

770. Найдите точки максимума функции $a(x) = x^2 e^{-x^2}$.

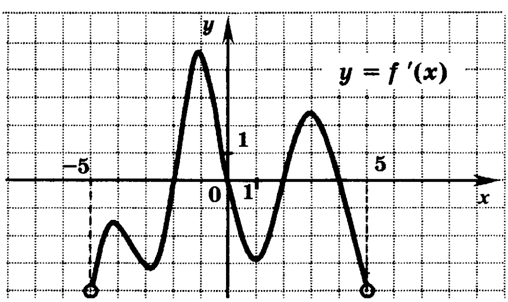
771. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-5; 5)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите наибольшее из тех значений x, при которых функция имеет минимум.



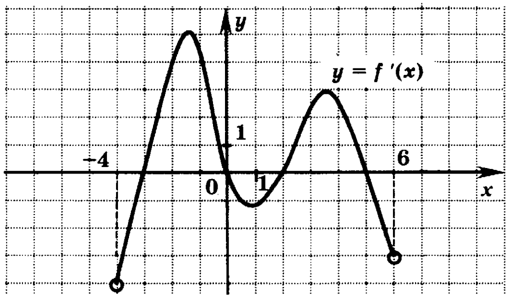
772. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-5; 5)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите наименьшее из тех значений x, при которых функция имеет максимум.



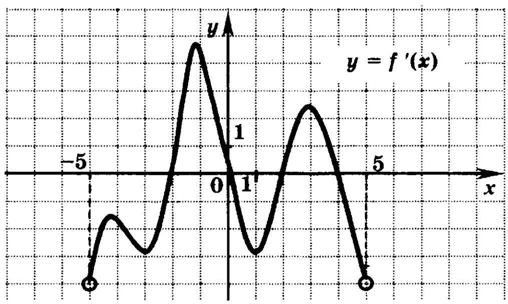
773. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-5; 5)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите наименьшее из тех значений x, при которых функция имеет максимум.



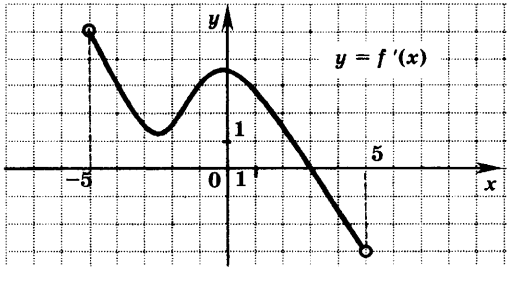
774. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–4; 6). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите наименьшее из тех значений x, при которых функция имеет минимум.



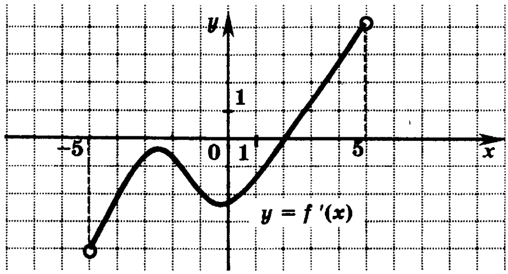
775. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–5; 5). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите наименьшее из тех значений x, при которых функция имеет минимум.



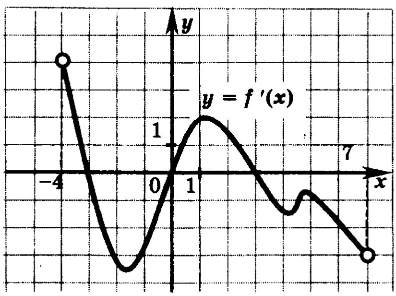
776. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–5; 5). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите значение x, при котором функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение на промежутке (–5; 5).



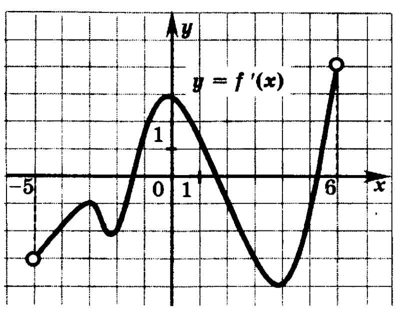
777. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–5; 5). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите значение x, в котором функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на промежутке (–5; 5).



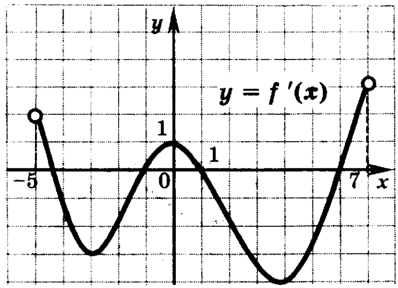
778. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–4; 7). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Сколько экстремумов имеет функция $y = f(x)$ на промежутке (–4; 7)?



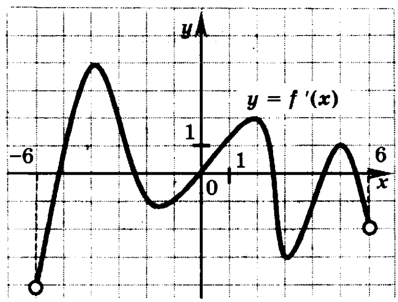
779. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке (–5; 6). График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Сколько экстремумов имеет функция $y = f(x)$ на промежутке (–5; 6)?



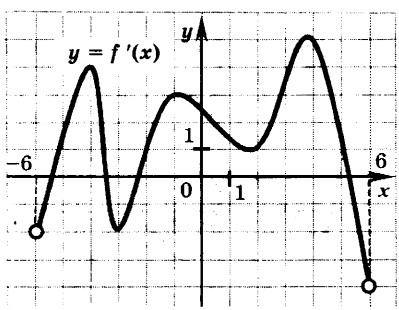
780. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-5; 7)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Сколько экстремумов имеет функция $y = f(x)$ на промежутке $(-5; 7)$?



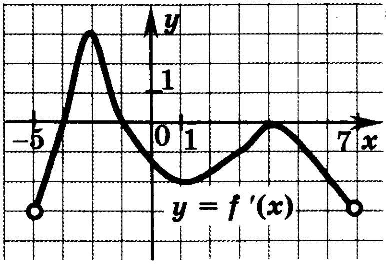
781. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-6; 6)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Сколько экстремумов имеет функция $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 6)$?



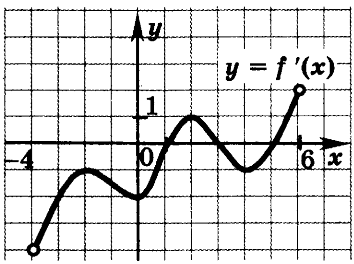
782. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-6; 6)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Сколько экстремумов имеет функция $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 6)$?



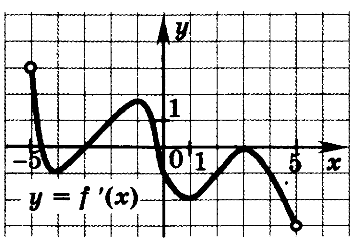
783. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–5; 7). На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику наклонены под углом 135° к положительному направлению оси абсцисс.



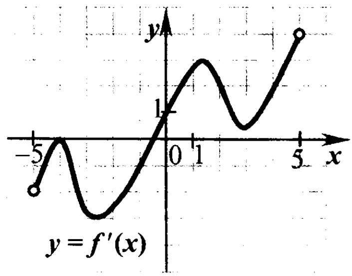
784. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–4; 6). На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс или совпадают с ней.



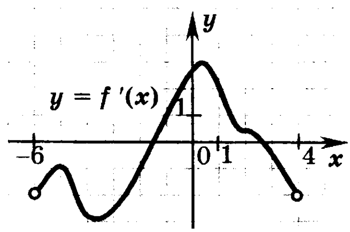
785. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–5; 5). На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику наклонены под углом 45° к положительному направлению оси абсцисс.



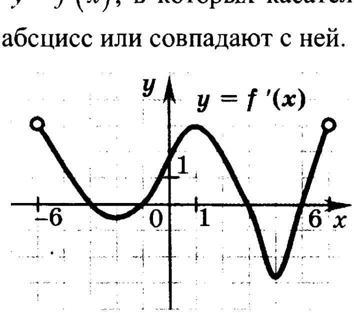
786. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику наклонены под углом $135°$ к положительному направлению оси абсцисс.



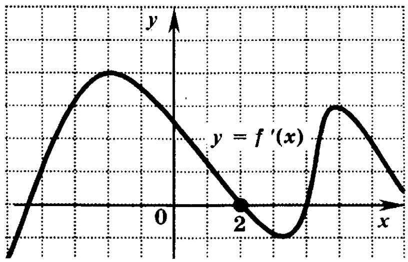
787. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику наклонены под углом $45°$ к положительному направлению оси абсцисс.



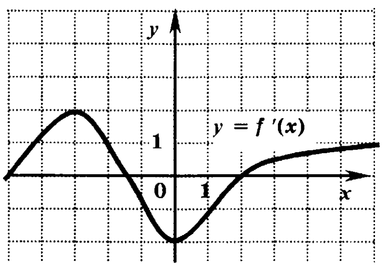
788. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс или совпадают с ней.



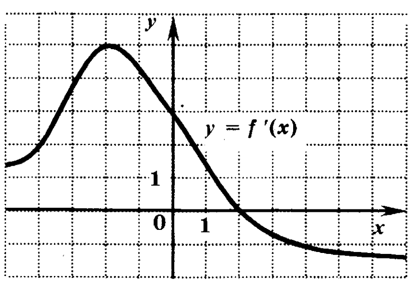
789. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите градусную меру угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.



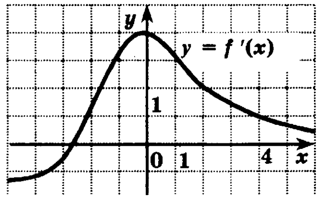
790. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите абсциссу x_0 точки, в которой угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, равен 2.



791. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите абсциссу x_0 точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



792. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 4$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке изображен график производной этой функции.



793. При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{2ax^2 - 4x}$ имеет минимум в точке $x_0 = 1$?

794. При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{x^2 - ax}$ имеет минимум в точке $x_0 = 3$?

795. При каком значении a функция $y = \sin(2x + a)$ имеет максимум в точках $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$?

796. При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 + 10x - 7}$ имеет максимум в точке $x_0 = 1$?

797. При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[7]{ax^2 - 2x + 1}$ имеет минимум в точке $x_0 = 1$?

798. При каком значении a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 + 10x - 2}$ имеет максимум в точке $x_0 = 1$?

799. При каком значении a функция $y = \sqrt[7]{ax^2 + 7x - 3}$ имеет максимум в точке $x_0 = 3{,}5$?

800. При каком значении a функция $y = \sqrt[6]{7x + ax^2 - 1}$ имеет максимум в точке $x = 1{,}75$?

801. При каком значении a функция $y = \sqrt[7]{3x^2 + ax - 4}$ имеет минимум в точке $x_0 = -1$?

802. При каком значении a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 - 6x + 11}$ имеет минимум в точке $x_0 = 0{,}75$?

4.2. Первообразная функции и интеграл

4.2.1. Нахождение первообразных функций

803. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 + x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 3).

804. Для функции $f(x) = \cos x + \sin x + \frac{1}{\sin^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(\frac{\pi}{4};\ 4)$.

805. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + 1$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (0; 7).

806. Для функции $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} + 7\sin x - 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(\frac{\pi}{2};\ 9)$.

807. Для функции $f(x) = 3x^2 + 6x^5 + 8\sin x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (0; –5).

808. Для функции $f(x) = \frac{16}{x^2} + 31 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 8).

809. Найдите первообразную функции $y = \sin x + \cos 2x$, график которой проходит через точку $M(0;\ 9)$.

810. Найдите первообразную функции $y = -\frac{3}{2x^2}$, график которой проходит через точку $M(0{,}5;\ 7)$.

811. Для функции $y = \frac{1}{\cos^2 2x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(\pi/2;\ 2)$.

812. Для функции $y = \frac{2}{\sin^2 3x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(\pi/6;\ 3)$.

813. Найдите первообразную функции $y=\frac{3}{4x}$, график которой проходит через точку M(0,25; 3).

814. Найдите первообразную функций $y = 4e^{2x} + 1$, график которой проходит через точку M(0; 3).

815. Для функции $y=\frac{2}{x\ln 3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M(3; 3).

816. Для функции $y=-\frac{2}{x^2}+x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M(–2; 4).

817. Найдите первообразную F функции $f(x) = \frac{1}{x}+3x^2$, если известно, что $F(1) = 3$.

818. Найдите первообразную F функции $f(x) = 3^x\ln3 - 2x^3 + \cos x$, если известно, что $F(0) = 2$.

819. Найдите первообразную F функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$, если известно, что $F(1) = 6$.

820. Найдите первообразную F функции $f(x) = e^x - 3x^2$, если известно, что $F(0) = 2$.

821. Найдите первообразную F функции $f(x) = 3x^2 - 2e^x$, если известно, что $F(0) = 0$.

822. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=\ln x$, если известно, что $F(1) = 0$.

823. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=x\ln x$, если известно, что $F(1) = 1$.

824. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=x^2\ln x$, если известно, что $F(1) = -1$.

825. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=xe^x$, если известно, что $F(0) = 0$.

826. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=x^2e^x$, если известно, что $F(0) = 1$.

4.3. Геометрический смысл интеграла

827. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3, x = 4$.

828. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}$.

829. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2$, $y = 4$, $x = -1, x = 1$.

830. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{\sin^2 x}, y = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$.

831. Найдите утроенную площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 4$ и осями координат.

832. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$, $x = 3$ и осями координат.

833. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$ и осью абсцисс.

834. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x} + 2$, $x = 1, x = 4$ и осью абсцисс.

835. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin x$, $x = 0,\ x = \frac{\pi}{3}, y = 0$.

836. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x + \frac{3}{\pi}, x = 0,\ x = \frac{\pi}{6}, y = 0$.

837. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - 1$, $x = 1, x = 2, y = 0$.

838. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $x = 1, x = e, y = 0$.

839. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos\frac{x}{3}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и осями координат.

840. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - \sqrt{x}$, $x = 9$ и осями координат.

841. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $x = 1, x = 3, y = 0$.

842. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^2 x$, $y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{6}$.

843. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos^2 x$, $y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{6}$.

844. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 + \sin 2x$, $y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.

845. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 + \cos 2x$, $y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.

846. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$, $y = 0,\ x = 0,\ x = \ln 2$.

5. Геометрия

5.1. Планиметрия

5.1.1. Треугольник

847. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна 8. Найдите основание треугольника.

848. Стороны треугольника равны 5, 12 и 13. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

849. В треугольнике ABC $AC = 16$ и $BC = 12$. На продолжениях сторон AC и BC за точку C отмечены точки E и D соответственно так, что прямые DE и AB параллельны. Найдите CE, если $CD = 6$.

850. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 75, а боковые стороны равны $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

851. Площадь треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$, $\angle B = 120°$, $AB = 6$. Найдите BC.

852. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Найдите его площадь, если площадь треугольника ABM равна 25.

853. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120°$, медиана AM равна $\sqrt{21}$. Найдите длину основания AC.

854. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 3 см и 4 см.

855. Найдите площадь треугольника, если одна из его сторон равна 4 см, а высота, опущенная на эту сторону, равна 2 см.

856. Найдите площадь треугольника, если одна из его сторон равна 2 см, а высота, опущенная на эту сторону, равна 6 см.

857. Площадь треугольника ABC равна 15 дм^2. На стороне AC взята точка D так, что $AD/DC = 2/3$. Длина перпендикуляра DH, проведенная на сторону BC, равна 6 дм. Найдите BC.

858. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, равны соответственно 5 и 6 дм. Найдите длину боковой стороны.

859. Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 3, а углы при основании 30°.

860. Площадь равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$, а углы при основании 30°. Найдите высоту, опущенную на основание.

861. Найдите площадь равностороннего треугольника, если точка пересечения медиан находится на расстоянии 2 от основания.

862. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если углы при основании равны 45°, а точка, взятая на основании, находится на расстоянии, равном 3, от боковых сторон.

863. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 120°, а площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$.

864. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AH = BC = 8\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABO.

865. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AK = 12$, $KC = 8$. Найдите AO.

866. Биссектриса AM и медиана BK прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O, $AB = 8$, $BC = 6$. Найдите отношение $BO : OK$.

867. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота BP и биссектриса AM пересекаются в точке O, $AO = 4$, $OM = 3$, $AC = 2$. Найдите боковую сторону треугольника ABC.

868. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC взята точка K так, что угол BKC равен углу B. Найдите гипотенузу AB, если $CK = 4{,}5$ и $AK = 3{,}5$.

869. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите периметр треугольника.

870. Наибольшая сторона AB треугольника ABC равна $8\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle A = 45°$. Найдите площадь треугольника.

871. Сторона AB треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. На стороне BC взята точка K так, что $BK = 9\sqrt{3}$, $KC = 16\sqrt{3}$ и $\triangle ABC \sim \triangle KAC$. Найдите площадь треугольника KAC.

872. Сторона BC треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$. На стороне AB отмечена точка P так, что $\angle ABC = \angle ACP$. Найдите площадь треугольника ABC, если $BP = \frac{9\sqrt{3}}{5}$ и $AP = \frac{16\sqrt{3}}{5}$.

873. Отрезки AM и CK — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $AC = 18$, $\angle B = 60°$. Найдите KM.

874. Через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и пересекающая катет AC в точке K. Найдите площадь треугольника AMK, если $AK = 12,5$ и $KC = 3,5$.

875. В прямоугольном треугольнике ABC из середины M катета AC проведен перпендикуляр MK к гипотенузе AB. Найдите площадь треугольника AKM, если $AB = 100$ и $AM = 30$.

876. В треугольнике ABC $AB = 17$, $BC = 15$, $AC = 8$, отрезок AO — биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABO.

877. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса острого угла C пересекает сторону AB в точке X. Площадь треугольника ABC равна 20, а $\sin B = 0,25$. Найдите площадь треугольника ACX.

878. В треугольнике ABC $AB = 39$, $BC = 42$, $CA = 45$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, биссектрисой BK и медианой BM.

879. В треугольнике ABC $AB = 39$, $BC = 42$, $CA = 45$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, биссектрисой BK и высотой BH.

880. Медианы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O, $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$. Найдите площадь треугольника AOM.

881. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$. На стороне AC взята точка K так, что $AK = 4$, $CK = 5$, $\angle ABK = \angle C$. Найдите площадь треугольника BKC.

5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

882. В прямоугольнике меньшая сторона равна 2 и вдвое меньше диагонали. Найдите периметр прямоугольника.

883. Диагональ ромба равна 1,25. Этот ромб равновелик равнобедренному треугольнику с боковой стороной 13 и основанием 10. Найдите вторую диагональ ромба.

884. Точка О равноудалена от вершин A и B прямоугольника $ABCD$ и от середины стороны CD. Найдите расстояние ОA, если $AB = 2$, $AD = 5$.

885. Стороны параллелограмма равны 15 и 20, а одна из диагоналей равна 25. Найдите длину другой диагонали.

886. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 10 и 12.

887. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 5 и 6.

888. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 4 : 3$. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 132.

889. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне AD. Площадь параллелограмма равна $36\sqrt{3}$, $\angle C = 120°$. Найдите большую сторону параллелограмма.

890. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 8$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, углов C и D — в точке M. Найдите KM.

891. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают стороны BC и AD в точках K и P соответственно, причем $BC : KC = 5 : 2$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 75. Найдите площадь четырехугольника $AKCP$.

892. Площадь ромба равна 600, а отношение длин диагоналей равно 4 : 3. Найдите высоту ромба.

893. Найдите высоту ромба, если его меньшая диагональ равна 6, а сторона равна 5.

894. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и M так, что $AK = KM = MB$. Прямые CM и DK пересекаются в точке O. Площадь параллелограмма равна 40. Найдите площадь треугольника COD.

895. Сторона параллелограмма равна 21, а диагонали равны 34 и 20. Найдите площадь параллелограмма.

5.1.3. Трапеция

896. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 20, а диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

897. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD, пересекает основание AD в точке M. Вычислите $\frac{BC}{AD}$, если $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$.

898. Диагональ AC трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне CD. Окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD и пересекает основание AD в точке M. Вычислите $\frac{AM}{MD}$, если $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$.

899. Основания трапеции равны 12 и 18, а одна из диагоналей равна 20. Найдите длину меньшего из отрезков, на которые делится эта диагональ точкой пересечения диагоналей.

900. Точка M — середина боковой стороны BC трапеции $ABCD$. Площадь треугольника AMD равна 8. Найдите площадь трапеции.

901. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 3 и 6, диагонали пересекаются в точке O, сумма площадей треугольников AOB и COD равна 40. Найдите высоту трапеции.

902. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середину меньшего основания и середину боковой стороны равен 7. Найдите площадь трапеции.

903. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, одно из оснований равно 17, а площадь равна 81. Найдите второе основание трапеции.

904. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся в отношении 3 : 4. Площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон трапеции равна 196. Найдите боковую сторону трапеции.

905. Боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а содержащие их прямые взаимно перпендикулярны, площадь трапеции равна 144. Найдите среднюю линию трапеции.

906. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) основания равны 13 и 26, одна из боковых сторон равна 5, а $\angle C - \angle A = 90°$. Найдите площадь трапеции.

907. Найдите высоту трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны 15 и 20.

908. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 13. Одна из диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ.

909. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит основание на отрезки длиной 20 и 5. Найдите площадь трапеции.

910. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O и равны 8 и 5. Найдите среднюю линию трапеции, если $\angle BOC = 60°$.

911. В трапеции с основаниями 8 и 2 проведены диагонали. Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются отрезки диагоналей и большее основание трапеции, если высота трапеции равна 7.

912. Диагонали трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) пересекаются в точке O так, что $MO : OP = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника NPQ, если площадь трапеции равна 8.

913. В равнобедренной трапеции тупой угол равен 120°, а меньшее основание равно боковой стороне и равно 6. Найдите площадь трапеции.

5.1.4. Окружность

914. Окружность, центр которой лежит внутри квадрата $PQRS$, касается стороны PQ в точке K, пересекает сторону PS в точках A и B ($AB = 16$), а диагональ PR — в точках C и D, $\left(CD = 2\sqrt{92}\right)$. Найдите радиус окружности.

5.1.5. Выпуклые многоугольники

915. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O, $AO=6$, $OC=4$ и $BO:OD=2:7$. Найдите площадь треугольника AOB.

916. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 52. Диагонали пересекаются в точке O, $AO:OC=4:9$, $BO:OD=3:5$. Найдите площадь треугольника AOD.

917. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площади треугольников ABC, BCD и AOD равны соответственно 34, 80 и 168.

5.1.6. Вписанные и описанные многоугольники

918. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найдите длину катета, если длина стороны квадрата равна $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ треугольника.

5.1.7. Окружность, вписанная и описанная около многоугольника

919. Около окружности описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна $2\sqrt{3}$. Одно основание трапеции в 3 раза больше другого. Чему равна боковая сторона трапеции?

920. Около окружности радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ описана равнобедренная трапеция. Площадь этой трапеции равна $3\sqrt{5}$. Чему равна боковая сторона трапеции?

921. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Площади круга и трапеции равны соответственно $\frac{7}{4}\pi$ и $4\sqrt{7}$. Найдите боковую сторону трапеции.

922. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 30°, а площадь равна 72, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

923. Площадь правильного восьмиугольника равна $8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого восьмиугольника.

5.1.8. Разные задачи

924. Точки B и M лежат по разные стороны от прямой AC, $\angle ABC = \angle CAM$, $\angle BAC = \angle AMC$, $BC = 3$, $CM = 12$. Найдите длину отрезка AC.

5.2. Стереометрия

5.2.1. Многогранники

5.2.1.1. Правильные многогранники

925. Диагональ куба равна 6 см. Найдите площадь полной поверхности куба.

926. Высота правильного тетраэдра равна $6\sqrt{6}$ *cm*. Найдите ребро этого тетраэдра.

927. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точка P — середина ребра DC. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и D_1P.

928. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими высоту и ребро тетраэдра.

929. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости AB_1D_1.

930. В правильном тетраэдре $MABC$ с ребром $\frac{\sqrt{6}}{2}$ проведено сечение через середину ребра AB параллельно плоскости AMC. Найдите расстояние между плоскостью сечения и плоскостью грани AMC.

931. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt[4]{2}$. Секущая плоскость проходит через середины ребер AA_1, DD_1 и A_1B_1. Найдите площадь сечения.

932. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной $4\sqrt[4]{3}$ проведено сечение через середины ребер A_1B_1, B_1C_1 и CC_1. Найдите площадь сечения.

933. Площадь сечения, проходящего через ребро основания и точку пересечения диагоналей куба, равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности куба.

934. Ребро куба равно $2\sqrt[4]{3}$. Центры его граней служат вершинами правильного октаэдра. Найдите площадь поверхности октаэдра.

935. Вершины A, B, C и B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединены отрезками. Объем полученного тетраэдра $ABCB_1$ равен 10. Найдите объем куба.

5.2.1.2. Призма

936. Найдите площадь боковой поверхности прямой прямоугольной призмы, если известно, что одна из сторон основания равна 7 см, другая сторона основания равна 8 см, косинус угла между ними равен 2/7, а боковое ребро призмы равно 11 см.

937. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AA_1.

938. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = AC = 15$, $BC = 24$. Найдите тангенс угла между плоскостями ACC_1 и A_1BC_1, если высота призмы равна 72.

939. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения: одно через вершину A_1 и середины боковых ребер BB_1 и CC_1, а другое — через вершину B параллельно первому сечению. Сторона основания призмы равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, боковое ребро равно 6. Найдите расстояние между сечениями.

940. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2\sqrt{3}$, сторона основания равна 2. Найдите градусную меру угла между прямыми BB_1 и DC_1.

941. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы, $\angle BAD = \angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60°$. Найдите градусную меру угла между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.

942. Основание параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 45°$, $\angle BAD = 60°$. Найдите градусную меру угла между плоскостями граней AA_1D_1D и AA_1B_1B.

943. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 8 и высотой $2\sqrt{6}$ на продолжении ребра BB_1 за точку B_1 отложили отрезок B_1K, равный высоте призмы. Найдите площадь сечения призмы плоскостью ACK.

944. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{5}$, высота основания равна $\sqrt{3}$. Найдите периметр сечения, проходящего через вершины B, C, и A_1.

945. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а сторона основания равна 8. Найдите периметр сечения, проходящего через вершину A и середины ребер A_1B_1 и A_1C_1.

946. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{6}$, сторона основания равна 2. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, C, и A_1.

947. В правильной четырехугольной призме со стороной основания $4\sqrt{2}$ и высотой $8\sqrt{3}$ проведено сечение через диагональ основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения.

948. Основание прямой треугольной призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Точка K лежит на отрезке, соединяющем центры вписанных в основание окружностей, и равноудалена от всех граней призмы. Найдите площадь полной поверхности призмы.

949. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 и 4. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{1}{35}$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

950. Основание прямого параллелепипеда — квадрат, площадь которого равна 16, высота параллелепипеда в 2 раза больше стороны основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

951. Разверткой боковой поверхности правильной четырехугольной призмы является квадрат со стороной, равной 8. Найдите площадь полной поверхности призмы.

952. Сечение, проходящее через центр основания и боковое ребро правильной шестиугольной призмы, является квадратом со стороной, равной 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

953. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 2, объем призмы равен 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

954. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной 2 и углом A, равным 60°. Плоскость BDC_1 наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

955. Площади двух граней наклонной треугольной призмы равны 8 и 6, угол между ними равен 90°, боковое ребро равно 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

956. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

957. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 и 4. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

958. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 3$, $BC = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Через диагональ основания AC и вершину B_1 проведена плоскость, удаленная от вершины B на расстояние 1,2. Найдите объем параллелепипеда.

959. Стороны основания прямого параллелепипеда равны $2\sqrt{2}$ и 5 и образуют угол 45°. Найдите объем параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна 7.

960. Основание призмы — квадрат со стороной 2. Вершина одного из оснований удалена от каждой вершины второго основания на расстояние, равное $\sqrt{6}$. Найдите объем призмы.

961. Диагонали B_1F и B_1E правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите объем призмы.

962. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, а диагональ большей по площади боковой грани равна $10\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

963. Основание прямой призмы — треугольник, две стороны которого равны 10. Одна из боковых граней призмы — квадрат, площадь которого равна 144. Найдите объем призмы.

964. Основание прямой призмы — ромб с диагоналями, равными 6 и 8, а боковая грань — квадрат. Найдите объем призмы.

965. Высота правильной четырехугольной призмы равна 2, диагональ призмы равна 6. Найдите объем призмы.

966. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 11 и 21, а боковая сторона равна 13. Площадь диагонального сечения призмы равна 180. Найдите объем призмы.

967. В наклонной треугольной призме высота равна $\sqrt{6}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45°. Площади двух боковых граней равны 3 и 6, а угол между ними 120°. Найдите объем призмы.

968. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Объем призмы равен 6. Найдите объем пирамиды $MA_1B_1D_1$.

5.2.1.3. Пирамида

969. В правильной шестиугольной пирамиде радиус окружности, описанной вокруг основания, равен 2, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

970. Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее ребра равны 5, а радиус окружности, описанной вокруг основания, равен $3\sqrt{2}$.

971. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной около основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 1.

972. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если высота равна 2, а плоские углы при вершине прямые.

973. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна $16\sqrt{2}$, а площадь основания 4. Найдите высоту пирамиды.

974. Через сторону AB основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC, пересекающее его в точке K. Известно, что $AB = 4$, $\frac{SK}{SC} = \frac{4}{5}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

975. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 4. Через сторону AB проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC и пересекающее его в точке K. Известно, что $\frac{SK}{SC} = \frac{4}{5}$. Найдите апофему пирамиды.

976. Сторона основания AB правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{10}$. Через сторону AB проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC и пересекающее его в точке K. Известно, что $\frac{SK}{SC} = \frac{4}{5}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

977. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через сторону AB основания проведено сечение наименьшей площади, пересекающее ребро SC в точке K. Отношение площади сечения к площади основания пирамиды равно $\frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{SK}{KC}$.

978. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через сторону AB проведено сечение наименьшей возможной площади. Боковое ребро пирамиды равно 3, а отношение площади сечения к площади основания пирамиды равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро SA пирамиды равно 3.

979. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат $ABCD$ со стороной, равной 6. Грани DMC и BMC перпендикулярны плоскости основания. Точка K делит ребро AM в отношении 1 : 2, считая от вершины A. Найдите расстояние от точки K до плоскости DMC.

980. Стороны AB и A_1B_1 оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. Найдите расстояние между ребром BC и плоскостью ADB_1.

981. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, а высота равна $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите расстояние от вершины A_1 меньшего основания до прямой C_1C.

982. Тангенс угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $2\sqrt{2}$. Найдите градусную меру плоского угла при вершине пирамиды.

983. Вычислите высоту треугольной пирамиды с равными боковыми ребрами, если ее объем равен $\frac{27\sqrt{3}}{2}$, а все плоские углы при вершине прямые.

984. Отношение стороны основания правильной четырехугольной пирамиды к ее высоте равно $\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

985. Высота правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, сторона основания равна $\sqrt{6}$. Точки M и N — середины ребер SC и CD соответственно. Найдите градусную меру угла между прямой MN и плоскостью основания пирамиды.

986. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами 12 и 16. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 360. Вершина пирамиды равноудалена от большего катета и продолжений меньшего катета и гипотенузы (они продолжены за больший катет). Найдите высоту пирамиды.

987. Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды равно $4\sqrt{2}$ *м*, а двугранный угол при боковом ребре равен $60°$. Найдите периметр сечения, проходящего через диагональ основания перпендикулярно боковому ребру.

988. Основание пирамиды $DABC$ — треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, а гипотенуза и катет равны 15 и 9. Плоскость, параллельная основанию, делит боковое ребро на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины D. Найдите периметр сечения.

989. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит боковое ребро в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения.

990. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равна $2\sqrt{3}$, ребро основания равно $2\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра SC и диагональ BD основания.

991. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S точка M делит сторону основания BC в отношении $5:4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через точки M и A перпендикулярно основанию ABC, если сторона основания равна $\sqrt{61}$, а высота пирамиды равна 40,5.

992. Ребро основания правильной треугольной пирамиды равно 2, а боковое ребро равно $\sqrt{5}$. Найдите периметр сечения, проходящего через ее вершину и середины двух ребер основания.

993. Боковое ребро и сторона меньшего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Угол между боковым ребром и плоскостью большего основания равен 60°. Найдите площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

994. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Каждый из двугранных углов при сторонах основания пирамиды равен 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

995. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 6 и боковым ребром 5 проведено сечение через середину высоты параллельно основанию. Вычислите площадь боковой поверхности получившейся усеченной пирамиды.

996. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, сторона основания равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

997. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 4, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

998. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно $\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

999. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $3\sqrt{2}$ и .$6\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем усеченной пирамиды.

1000. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом C, равным 90°. Все боковые ребра пирамиды равны. Грань SAC образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем пирамиды, если $SA = 3\sqrt{3}$.

1001. Основание пирамиды $KABCD$ — квадрат, диагональ которого равна 4. Ребро KB перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если $KB = 6$.

1002. Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13, высота MH грани MBC равна 5, $AB = 8$. Найдите объем пирамиды.

1003. Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, проекция вершины M — точка пересечения диагоналей этого ромба; $AM = AB = 5$, $AC = 6$. Найдите объем пирамиды.

1004. Ребро KA пирамиды $KABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите объем пирамиды, если $KA = 12$, $KB = 13$, $KC = 4\sqrt{10}$, $\angle ACB = 90°$.

1005. Основание пирамиды $MABC$ — правильный треугольник ABC, ребро MA перпендикулярно плоскости ABC. Высота пирамиды равна $\sqrt{3}$, а высота MH грани MBC равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

1006. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, апофема равна 4. Найдите объем пирамиды.

1007. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3, а плоский угол при вершине равен 60°. Найдите объем пирамиды.

1008. Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами 3 и 4. Ребро MA перпендикулярно плоскости ABC, а плоскость MBD образует с ней угол, равный 45°. Найдите объем пирамиды.

1009. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{3}$. Грань SAD наклонена к плоскости основания под углом 60°, а грань SBC перпендикулярна к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

1010. Основание пирамиды — прямоугольник, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$, а все боковые ребра пирамиды равны друг другу. Секущая плоскость a проходит через вершину пирамиды и середины двух смежных сторон основания. Косинус угла между плоскостями основания и сечения равен 0,6. Найдите объем треугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью a.

5.2.1.4. Разные задачи

1011. Угол между плоскостями правильных треугольников ABC и ABD равен 60°, $AB = 4$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

5.2.2. Тела вращения

5.2.2.1. Конус

1012. В усеченном конусе радиусы оснований равны 5 и 2, а высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

1013. Площадь боковой поверхности конуса равна 72π, а диаметр основания равен 6. Найдите периметр осевого сечения конуса.

1014. Хорда основания конуса стягивает дугу в 120°. Сечение, проходящее через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол, равный 45°. Высота конуса равна $\sqrt[4]{5}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

1015. Образующая усеченного конуса равна 2. Диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

1016. Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 вращается вокруг прямой, проходящей через вершину меньшего острого угла и параллельной противолежащему катету. Найдите площадь поверхности тела вращения.

1017. Радиус основания конуса равен 6, а площадь осевого сечения равна 18. Найдите объем конуса.

1018. В конусе через его вершину под углом 60° к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 60°. Высота конуса равна 3. Найдите его объем.

1019. В конусе проведено сечение параллельно основанию. Радиус основания равен 4, а площадь сечения равна 4π. Найдите объем образовавшегося усеченного конуса, если объем конуса равен 80.

5.2.2.2. Шар и сфера, их сечения

1020. В шаре проведено два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна 144. Расстояние от центра шара до общей хорды этих сечений равно $9\sqrt{2}$. Найдите объем шара.

5.2.3. Комбинации тел

1021. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 1. Две грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Высота пирамиды равна 2. Найдите радиус описанного около пирамиды шара.

1022. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

1023. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1 и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

1024. Прямоугольный треугольник с катетами 2 и 1 вращается вокруг большего катета. Найдите площадь сферы, описанной около тела вращения.

1025. Объем треугольной пирамиды равен 270. Найдите объем пирамиды, вершинами которой являются точки пересечения медиан всех граней данной пирамиды.

1026. В усеченный конус вписана правильная треугольная усеченная пирамида. Радиусы оснований конуса равны 1 и 4, а образующая равна 5. Найдите объем усеченной пирамиды.

1027. Две равные боковые грани AKB и CKB треугольной пирамиды $KABC$ перпендикулярны плоскости основания, а грань AKC наклонена к плоскости основания под углом 45°, $\angle ABC = 60°$. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен $5\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

1028. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $12\pi\sqrt{3}$. Расстояние между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра равно $\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

1029. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$, большая диагональ которого образует со стороной угол 30°. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость a, параллельная плоскости основания, пересекает высоту пирамиды SO в точке T так, что $ST : TO = 2 : 3$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью a. Объем цилиндра равен $72\pi\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды $SABCD$.

1030. Основание ABC правильной треугольной пирамиды $MABC$ вписано в основание цилиндра с центром в точке O_1. Центр второго основания — точка O_2 — лежит на прямой MO_1. Объем пирамиды равен 45, объем цилиндра равен $48\pi\sqrt{3}$. Найдите отношение $MO_1 : MO_2$.

1031. Ребро основания правильной треугольной призмы $MNPM_1N_1P_1$ равно 6. Сечение призмы, проходящее через точку пересечения медиан ее основания параллельно грани MM_1N_1N, является квадратом $ABCD$. В призме расположен цилиндр так, что одно его основание вписано в квадрат $ABCD$, а другое основание лежит в грани MM_1N_1N. Найдите объем цилиндра.

1032. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45°, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 16.

1033. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Найдите объем конуса.

1034. Площади оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 и 100, а апофема равна 5. Найдите объем вписанного в пирамиду усеченного конуса.

1035. В шар радиусом $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Угол между прямой AB_1 и плоскостью ACC_1 равен 45°. Найдите объем призмы.

1036. Основание пирамиды — трапеция. Объем пирамиды равен 540. Найдите объем пирамиды, вершинами которой служат точки пересечения медиан всех граней данной пирамиды и точка пересечения диагоналей основания.

1037. В треугольной наклонной призме точки пересечения диагоналей ее боковых граней и точки пересечения медиан ее оснований являются вершинами шестигранника. Найдите отношение его объема к объему данной треугольной призмы.

1038. Основание прямой четырехугольной призмы — прямоугольник. Диагональ призмы равна 35. Расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагональ основания призмы и боковое ребро призмы, равно 15. Найдите объем цилиндра, описанного около данной призмы.

1039. В шар радиусом $\sqrt{30}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Угол между прямой AB_1 и плоскостью ACC_1 равен $30°$. Найдите объем призмы.

1040. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен $72\sqrt{2}$. Угол между прямой AB_1 и плоскостью ACC_1 равен $45°$. Найдите радиус шара.

1041. Основание правильной пирамиды $MABCD$ — квадрат $ABCD$ со стороной 4. Плоскость n параллельна плоскости основания пирамиды и пересекает ребра MA, MB, MC и MD в точках P, Q, R и S соответственно. Нижнее основание цилиндра вписано в основание пирамиды $MABCD$, а верхнее — описано около основания пирамиды $MPQRS$. Найдите объем пирамиды $MPQRS$, если объем цилиндра равен 12π.

1042. В призме $ABCA_1B_1C_1$ основание — треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$. Вершина конуса M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 2 : 3$ и точки A, B и C лежат на окружности основания конуса. Найдите объем призмы, если площадь всей поверхности конуса равна 55π.

1043. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$: A_1C_1, A_1D и C_1D — диагонали граней $A_1B_1C_1D_1$ и AA_1D_1D и DD_1C_1C соответственно. В тетраэдр $D_1A_1C_1D$ вписан конус так, что его основание вписано в треугольник A_1C_1D и D_1 — его вершина. Найдите объем большей из частей, на которые куб делится плоскостью A_1C_1D, если объем конуса равен $\frac{\pi}{6}$.

1044. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16n$. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна 5.

РЕШЕНИЕ ТРЕНИРОВОЧНЫХ ТЕСТОВ

Решение варианта № 5

Часть 1

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?

Решение

200 р. — 100%

x р. — 115%

$x \cdot 100 = 200 \cdot 115$

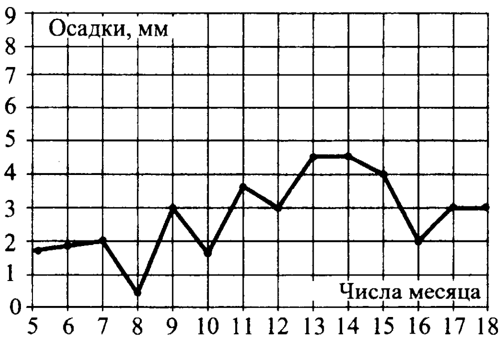
$100x = 23\,000$

$x = 230$ (р.) — цена на билет после повышения цены на 15%.

$4 \cdot 230 = 920$; $5 \cdot 230 = 1150 > 1000$

Ответ: 4.

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2013 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.

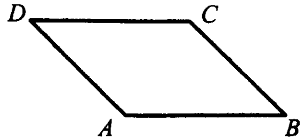


Решение

По рисунку видно, что 3 миллиметра осадков впервые выпало 9-го числа.

Ответ: 9.

3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150°.



Решение

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin \angle BAD = 14 \cdot 20 \cdot \sin 150° = 280 \cdot \frac{1}{2} = 140.$$

Ответ: 140.

4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

Решение

Так как результаты каждого выстрела независимы друг от друга, то мы можем применить теорему умножения вероятностей. Вероятность промаха при каждом выстреле равна $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность промахнуться три раза равна $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$.

Ответ: 0,001.

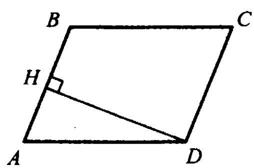
5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^x$.

Решение

$17^{2x+3} = \left(17^{-2}\right)^x$; $17^{2x+3} = 17^{-2x}$; $2x + 3 = -2x$; $4x = -3$; $x = -0,75$.

Ответ: –0,75.

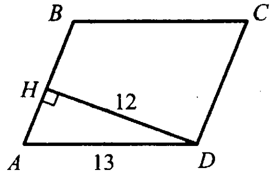
6. В параллелограмме *ABCD* высота, опущенная на сторону *AB*, равна 12, *AD* = 13. Найдите 13sin*B*.



Решение

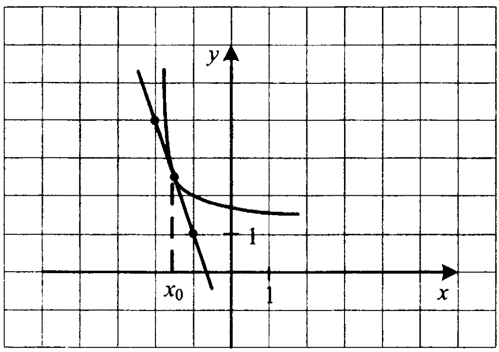
$\angle A + \angle B = 180° \Rightarrow \angle B = 180° - \angle A$; $\sin B = \sin(180° - A) = \sin A$

$$\sin A = \frac{DH}{AD} = \frac{12}{13} = \sin B \Rightarrow 13\sin B = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12\,.$$



Ответ: 12.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



Решение

По геометрическому смыслу производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. По рисунку видно, что этот угловой коэффициент равен –3.

Ответ: –3.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Решение

$$S_{б.п.} = 2\pi Rh = 24\pi \Rightarrow Rh = 12 \Rightarrow R = \frac{12}{h} = \frac{12}{4} = 3$$

$D = 2R = 6.$

Ответ: 6.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

Решение

$$\frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ} = \frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin(2\cdot 113^\circ)} = \frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{2\sin 113^\circ \cos 113^\circ} = \frac{21}{2} =$$

$= 10{,}5.$

Ответ: 10,5.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

Решение

$30t - 3t^2 = 48$

$3t^2 - 30t + 48 = 0$

$t^2 - 10t + 16 = 0$

$D = 100 - 4\cdot 16 = 36$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 8 \end{array}\right.$$

Из физических соображений (через 5 секунд автомобиль остановится), верный ответ: $t = 2$.

Ответ: 2.

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение

$$V_{ср.} = \frac{S_{общ.}}{t_{общ.}} = \frac{80\cdot\frac{t}{2} + 100\cdot\frac{t}{2}}{t} = 90 \text{ (км/ч)}$$

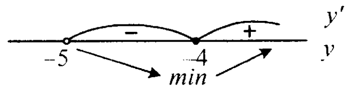
Ответ: 90.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7\ln(x+5) + 3{,}8$ на отрезке $[-4{,}9;\ 0]$.

Решение

$$y' = 7 - \frac{7}{x+5} = \frac{7x+28}{x+5} = \frac{7(x+4)}{x+5}$$

$$y(-4) = -28 - 7\ln 1 + 3{,}8 = -28 + 3{,}8 = -24{,}2$$



Ответ: –24,2.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 5\pi]$.

Решение

а) $\sin^2 x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$

$\sin^2 x = 5\sin x$

$\sin^2 x - 5\sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 5) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

б) $0 \le \pi n \le 5\pi$

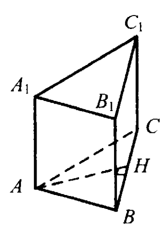
$0 \le n \le 5$

Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, то $n \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

Получаем корни $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi;\ 5\pi$.

Ответ: а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi;\ 5\pi$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



Решение

Плоскость ABC перпендикулярна ребру AA_1

$\text{пр}_{ABC}(AA_1) = A$

$\text{пр}_{ABC}(BC_1) = BC$

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство: $\sqrt{4-x^2}\left(4+5x+x^2\right) \geq 0$.

Решение

$\sqrt{(2-x)(2+x)}(x+1)(x+4) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}(2-x)(2+x)=0\\ \begin{cases}(2-x)(2+x)>0\\ (x+1)(x+4)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=2\end{array}\right.\\ \{x\in[-1;2)\end{array}\right.$$

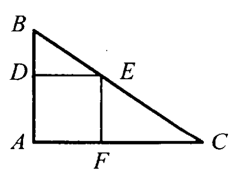
Ответ: $\{-2\} \cup [-1;\ 2]$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

Решение



а) Так как $ADEF$ — квадрат, то $\angle BDE = \angle EFC = 90°$.

$DE \parallel AC$, так как сумма односторонних углов EDA и FAD равна 180°.

$\angle BED = \angle ECF$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых DE и AC секущей $BC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta EFC$ по двум углам.

б) Пусть сторона квадрата x, тогда $BD = 2 - x$; $FC = 6 - x$. Исходя из того, что $\Delta BDE \sim \Delta EFC$:

$$\frac{BD}{EF} = \frac{DE}{FC} \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} = \frac{x}{6-x} \Leftrightarrow (2-x)(6-x) = x^2$$

$$12 - 8x + x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$S_{\Delta EFC} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6-x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$$

$$S_{ADEF} = x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{S_{\Delta EFC}}{S_{ADEF}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{9} = 1,5$$

Ответ: 1,5.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъёмную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.

Решение

$$y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}+\log_x a^5}+a^x\cdot\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{2a}\cdot a^5-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}}=$$

$$=\sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x^{\log_x a^5}-x^{\log_x a^x}\right)+\sqrt[3]{2a}(a^x-a^5)}=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)\cdot\left(a^5-a^x\right)}$$

$$\begin{cases} a>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)\left(a^5-a^x\right)\geq 0 \end{cases}$$

При $a\in(0;1)$ последнее неравенство системы эквивалентно $(x-2a)(x-5)\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;2a]\cup[5;+\infty)$ — не удовлетворяет условию задачи.

При $a=1$ это неравенство верно для $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$ — тоже не подходит.

При $a>1$ $x\in[2a;\ 5]$ (или $[5;\ 2a]$, если $2a>5$)

Область определения будет содержать ровно 2 целых числа, если

$$\left[\begin{array}{l} 2a\in(3;4] \\ 2a\in[6;7) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a\in(1{,}5;2] \\ a\in[3;3{,}5) \end{array}\right.$$

Ответ: $a\in(1{,}5;\ 2]\cup[3;\ 3{,}5)$.

19. Решите уравнение $x^2+3=7y$ в целых числах.

Остаток от деления на 7

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^2+3	3	4	0	5	5	0	4

Так как $7y = x^2 + 3$ делится на 7, то или $x = 7k + 2$ или $x = 7k + 5$, где $k \in \mathbb{Z}$.

При $x = 7k + 2$: $\quad 7y = 49k^2 + 28k + 4 + 3$

$y = 7k^2 + 4k + 1$

При $x = 7k + 5$: $\quad 7y = 49k^2 + 70k + 25 + 3$

$y = 7k^2 + 10k + 4$

Ответ: $(7k + 2;\ 7k^2 + 4k + 1)$; $(7k + 5;\ 7k^2 + 10k + 4)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение варианта № 15

Часть 1

1. После повышения стоимости билета на 10% 1 билет станет стоить $230 \cdot \frac{110}{100} = 253$ рубля. На 800 рублей можно будет купить 3 билета, так как. 4 билета стоят уже $4 \cdot 253 = 1012$ рублей, то есть 800 рублей не хватит для покупки 4 билетов.

Ответ: 3.

2. По графику видно, что давление в паровой турбине было выше 4 атмосфер между 1 и 7 минутами, то есть на протяжении $7 - 1 = 6$ минут.

Ответ: 6.

3. Из рисунка видно, что основание параллелограмма равно 7 см, а его высота, опущенная на основание, равна 4 см. Площадь параллелограмма равна $7 \cdot 4 = 28$ (см^2).

Ответ: 28.

4. При бросании двух игральных костей всего возможно $6 \cdot 6 = 36$ исходов. 5 очков выпадет в случаях: $1 + 4$; $2 + 3$; $4 + 1$; $3 + 2$, т.е. в 4 исходах. $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$.

Ответ: 0,11.

5. $\sqrt{3-2x} = 5$; $3 - 2x = 25$; $x = -11$

Ответ: –11.

6. Так как треугольник ABC прямоугольный, то
$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, поэтому $AB = \frac{\sqrt{11}}{6} BC$.

По теореме Пифагора
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = \frac{11}{36} BC^2 + 25$; $BC = 6$.

Ответ: 6.

7. Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0, который в свою очередь равен угловому коэффициенту. Из графика получаем, что угловой коэффициент равен 1.

Ответ: 1.

8. Площадь полной поверхности куба равна сумме площадей его шести равных граней, т.е. $S_{пов.} = 6a^2 = 24$ см^2; отсюда $a^2 = 4$; $a = 2$.

Ответ: 2.

Часть 2

9. $2^{\log_4 81} - 3^{\log_9 16} = 2^{\log_2 9} - 3^{\log_3 4} = 9 - 4 = 5.$

Ответ: 5.

10. Камень упадет, когда его высота станет равной нулю.

$h(t) = 15 - 2t - t^2$;

$t^2 + 2t - 15 = 0$;

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$;

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$; $t_1 = 3$; $t_2 = -5$.

Так как t — время и не может быть отрицательным, то получаем, что камень упадет через 3 секунды.

Ответ: 3.

11. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, а время, затраченное при движении против течения, равно t ч.

Из условия задачи получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{84}{v - v_{теч}} - \frac{84}{v + v_{теч}} = 1 \Leftrightarrow \frac{84}{v-1} - \frac{84}{v+1} = 1;$$

$84v + 84 - 84v + 84 = v^2 - 1$; $\quad 168 = v^2 - 1$; $\quad v^2 = 169$; $v = 13$.

Ответ: 13.

12. $y = 2\sqrt{3}\cos x + 3x - \pi$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = -2\sqrt{3}\sin x + 3 = 0;\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};\ t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $t = \frac{\pi}{2}$. В этой точке производная меняет знак с плюса на минус (проверьте самостоятельно!), поэтому $t = \frac{\pi}{3}$ есть точка максимума (а вторая найденная точка является точкой минимума). Значение функции в точке максимума равно $\sqrt{3}$.

Так как это локальный экстремум, то надо проверить значение функции в концевых точках отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

13. Сделаем замену в первом уравнении системы $t = \cos x$ и решим квадратное уравнение.

$2t^2 - 5t + 2 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$; $t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$; $t_1 = 2$; $t_2 = 0,5$.

Так как $t = \cos x$, то подходит лишь второй корень, поэтому

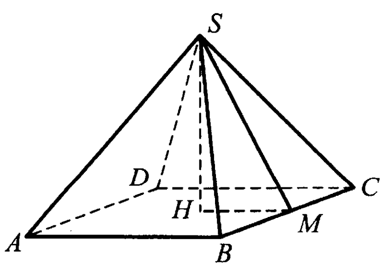
$$\cos x = 0,5 \,;\; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Подставим значение x во второе уравнение системы и получим

$$8 \cdot 0,5 - 2y = 3 \,; y = 0,5$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $y = 0,5$.

14.



По условию угол SMH равен 60°. $HM = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$. Отсюда

$$SH = HM \operatorname{tg} 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2};\; SM = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{4} + \frac{9}{4}} = 3.$$

Площадь полной поверхности пирамиды равна

$$S = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot SM\right) + a^2 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right) + 3^2 = 27.$$

Ответ: 27.

15. Выпишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \sqrt{2} \\ \log_2 x - \log_2^2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \sqrt{2} \\ \log_2 x(1 - \log_2 x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \sqrt{2} \\ 0 \leq \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < \sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}.$$

При данных значениях аргумента имеем:

$$\frac{1 - 2\sqrt{\log_2 x - \log_2^2 x}}{2\log_2 x - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2(1 - \log_2 x) - 2\sqrt{\log_2 x(1 - \log_2 x)}}{2\log_2 x - 1} < 0$$

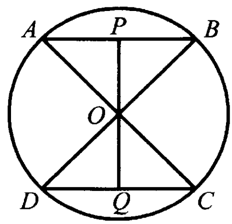
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 - \log_2 x}\left(\sqrt{1 - \log_2 x} - \sqrt{\log_2 x}\right)}{2\log_2 x - 1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{1 - \log_2 x} > \sqrt{\log_2 x} \\ \log_2 x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1 - \log_2 x} > \sqrt{\log_2 x} \\ \log_2 x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x \neq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < \frac{1}{2} \\ \log_2 x > \frac{1}{2} \\ x \neq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \sqrt{2} \\ x \neq 2 \end{array}\right..$$

Следовательно, решением уравнения будут все значения аргумента из ОДЗ, за исключением $x = 2$.

Ответ: $\left[1; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; 2\right)$.

16.



Поскольку дуги AB и CD равны 90°, то центральные углы AOB и COD равны 90°, поэтому треугольники AOB и COD являются равными и прямоугольными.

Прямые AB и CD параллельны, следовательно, расстояние между ними равно $PQ = 2 \cdot OP$, где OP — это высота равнобедренного треугольника AOB. Так как угол ABO равен 45°, то прямоугольный треугольник BPO также равнобедренный и $AB = 2 \cdot OP = 8$. Откуда $OP = 4$ и $PQ = 8$.

Ответ: 8.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъёмную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Выполним ряд эквивалентных преобразований:

$$\left|\left||15x+53|+18\right|-27\right|\le 30l^2+64$$

$$-30l^2-64\le\left||15x+53|+18\right|-27\le 30l^2+64$$

$$-30l^2-37\le\left||15x+53|+18\right|\le 30l^2+91$$

$$\left||15x+53|+18\right|\le 30l^2+91$$

$$-30l^2-91\le|15x+53|+18\le 30l^2+91$$

$$-30l^2-109\le|15x+53|\le 30l^2+73$$

$$|15x+53|\le 30l^2+73$$

$$-30l^2-73\le 15x+53\le 30l^2+73$$

$$-2l^2-\frac{42}{5}\le x\le 2l^2+\frac{4}{3}$$

Поскольку $x\in[-176;\ 154]$, то параметр l должен удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases}2l^2+\frac{4}{3}\le 154\\ -2l^2-\frac{42}{5}\ge -176\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l^2\le\frac{229}{3}\\ l^2\le 83{,}8\end{cases}\Leftrightarrow l^2\le\frac{229}{3}.$$

Наибольшее целое значение параметра l равно 8.

Ответ: 8.

19. Выразим из уравнения m: $m=\dfrac{36}{18-n^2}$.

Так как по условию $m, n\in\mathbb{Z}$, то $n\in\{1; 2; 3; 4\}$ (иначе m будет отрицательным).

Подставив эти значения n, получаем, что m будет натуральным только при $n=3$ и $n=4$, соответственно $m=4$ и $m=18$.

Ответ: (4; 3), (18; 4).

Решение варианта № 25

Часть 1

1. Так как 1 кг бананов стоит 40 рублей, то 2 кг 600 г будут стоить $40\cdot\left(2+\frac{600}{1000}\right)=104$ рубля. Поэтому сдача от покупки составит 1000 – 104 = 896 рублей.

Ответ: 896.

2. По графику видно, что температура начинает первый раз повышаться на 2-й минуте, значит кондиционер до первого выключения работал 2 минуты.

Ответ: 2.

3. Из рисунка видно, что основания трапеции равны 3 см и 7 см, а ее высота, опущенная на основание, равна 4 см. Площадь трапеции равна 0,5 (3 + 7) 4 = 20 (см^2).

Ответ: 20.

4. При бросании трех игральных костей возможны $6\cdot 6\cdot 6=216$ исходов. Из них благоприятным являются 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, т.е. 3 исхода. Следовательно, $P=\frac{3}{216}=\frac{1}{72}\approx 0{,}01$.

Ответ: 0,01.

5. $\log_5(2-x)=2$; $2-x=25$; $x=-23$.

Ответ: –23.

6. Так как треугольник BCD прямоугольный и DH — перпендикуляр к BC, то треугольники DCH и BCD подобны. Следовательно, углы B и CDH равны и $\frac{DH}{DC}=\cos CDH=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2}{3}$, поэтому $DH=4$.

Ответ: 4.

7. Точки экстремума функции $y=f(x)$ — это те точки, в которых производная обращается в ноль и при проходе через которую она меняет знак на противоположный. Из графика получаем, что таких точек 3.

Ответ: 3.

8. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т.е. $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \pi \cdot 4h = 8\pi;\ h = 2$.

Ответ: 2.

Часть 2

9. $\frac{18}{7^{\log_7 9}} = \frac{18}{9} = 2$.

Ответ: 2.

10. Камень будет находиться на высоте выше 20 метров, когда для его высоты выполняется неравенство

$$h(t) = -t^2 + 9t > 20 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 20 < 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 5.$$

Следовательно, камень будет находиться на высоте выше 20 метров с 4-й по 5-ю секунду, т.е. 1 секунду.

Ответ: 1.

11. Пусть производительность и время, за которое бригада выполнила задание, равны v дет/день и t дней. Из условия задачи получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} vt = 400 \\ (v-10)(t+2) = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{400}{v} = t \\ \frac{400}{v-10} = t+2 \end{cases}.$$

Из которой получаем уравнение

$$\frac{400}{v-10} - \frac{400}{v} = 2,$$

откуда $v^2 - 10v - 2000 = 0$; $v_1 = -40$, $v_2 = 50$.

Фактическая приозводительность бригады была 50 деталей в день; $t = 8$.

Ответ: 8.

12. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 1$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = x^2 - 2x = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

В первой точке производная меняет знак с плюса на минус (проверьте самостоятельно!), поэтому $x_1 = 0$ является точкой максимума (а вторая найденная точка является точкой минимума). Значение функции в точке максимума равно -1. Так как это локальный экстремум, то надо проверить значение функции в концевых точках отрезка $[-3;3]$: $f(-3) = -19$ и $f(3) = -1$. Следовательно, наибольшее значение функции равно -1.

Ответ: -1.

13. Выразим из второго уравнения системы $\operatorname{tg} x$ и подставим в первое уравнение:

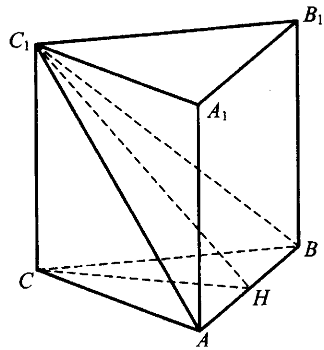
$$\operatorname{tg} x = \frac{y-2}{2};\ y^2 = 4(y-2)+4;\ y^2 - 4y + 4 = 0;\ y = 2.$$

Подставим данное значение аргумента в формулу для $\operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = 2$.

14.



Проведем высоты CH и C_1H. Так как треугольник ABC равносторонний, то $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{39}$. Из равнобедренного треугольника ABC_1 находим

$$C_1H = \sqrt{AC_1^2 - AH^2} = \sqrt{169-13} = 2\sqrt{39},$$

$$\cos C_1HC = \frac{CH}{C_1H} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда угол между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы равен 60°.

Ответ: 60°.

15. Выпишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ x^2 - 10x + 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 3, x \neq 5, x \neq 7.$$

При данных значениях аргумента выполним ряд преобразований:

$$\frac{\log_{\sqrt{13}}|x-5|}{x^2-10x+21}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{\sqrt{13}}|x-5|>0\\ x^2-10x+21>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{\sqrt{13}}|x-5|<0\\ x^2-10x+21<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-5|>1\\ (x-3)(x-7)>0\end{cases}\\ \begin{cases}|x-5|<1\\ (x-3)(x-7)<0\end{cases}\end{array}\right..$$

Решим первую систему из совокупности

$$\begin{cases}|x-5|>1\\ (x-3)(x-7)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>6\\ x<4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>7\\ x<3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>7\\ x<3\end{array}\right..$$

Решим вторую систему из совокупности

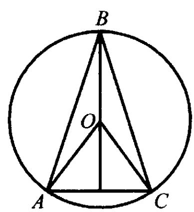
$$\begin{cases}|x-5|<1\\ (x-3)(x-7)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4<x<6\\ 3<x<7\end{cases} \Leftrightarrow 4<x<6.$$

С учетом ОДЗ получаем

$$x\in(-\infty;3)\cup(4;5)\cup(5;6)\cup(7;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;3)\cup(4;5)\cup(5;6)\cup(7;+\infty)$.

16.



Так как $\angle BOC$ центральный угол и $\angle BOC$ и $\angle BAC$ опираются на одну дугу, то $\angle BOC=2\angle BAC=150°$. Обозначим сторону треугольника через x. Так как $OB=OC=R$, то площадь треугольника BOC равна

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin150°=16;\ R=8.$$

Ответ: 8.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъёмную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Преобразуем функцию

$$y=\left((xa^{12})^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}a^{6,5}+\sqrt{2a}\cdot x^{2x\log_x a}-a^{2x}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\sqrt{x}a^6-\sqrt{2a}a^6+\sqrt{2a}\cdot a^{2x}-a^{2x}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{2a}\right)(a^6-a^{2x})\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Таким образом, область определения функции имеет вид:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}\ge\sqrt{2a}\\ a^6\ge a^{2x}\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}\le\sqrt{2a}\\ a^6\le a^{2x}\end{cases}\end{array}\right.\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2a\\ x\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 2a\\ x\ge 3\end{cases}\end{array}\right.\\ x\ge 0\end{cases}.$$

Область определения функции содержит только одно целое число ($x = 3$), если $2 < 2a < 4$, т.е. $1 < a < 2$.

Ответ: (1; 2).

19. Выразим из уравнения m: $m=\dfrac{40}{3-n^2}$.

Так как по условию $m, n\in\mathbb{Z}$, то $n\in\{\pm1;\pm2\}$ (иначе m не будет целым). При $n=\pm1$, $m = 20$, а $n=\pm2$, $m=-40$.

Ответ: (20; 1), (20; –1), (–40; 2), (–40; –2).

Решение варианта № 35

Часть 1

1. Монитор с наценкой стоит $6000 \cdot \frac{110}{100} = 6600$, значит, в сезон распродаж он будет стоить $6600 \cdot \frac{80}{100} = 5280$ рублей.

Ответ: 5280.

2. По графику видно, что давление в паровой турбине было выше 6 атмосфер между 1-й и 3-й и между 8-й и 9-й минутами, то есть на протяжении 3 – 1 + 9 – 8 = 3 минут.

Ответ: 3.

3. Фигура состоит из двух треугольников с общим основанием. Из рисунка видно, что общее основание треугольников равно 6 см, а их высоты, опущенные на это основание, равны 2 см и 3 см. Площади треугольников равны 0,5 · 6 · 2 = 6 и 0,5 · 6 · 3 = 9, поэтому площадь фигуры равна 6 + 9 = 15 (см^2).

Ответ: 15.

4. При бросании монеты три раза возможны 8 исходов. Из них благоприятными являются 4: О · О · О; О · О · Р; О · Р · О; Р · О · О. Искомая верятность равна $P = \frac{4}{8} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

5. $\frac{3+2x}{7} = \frac{1}{2}$; $6 + 4x = 7$; $x = 0,25$.

Ответ: 0,25.

6. Так как треугольник STK равнобедренный, то углы T и K равны, поэтому по теореме косинусов $TK^2 = ST^2 + SK^2 - 2 \cdot ST \cdot SK \cdot \cos S$; $\cos S = \cos(\pi - 2\angle K) = -\cos 2K = 2\sin^2 K - 1 = -\frac{7}{18}$. Значит, $TK = 20$.

Ответ: 20.

7. Значение производной функции $y = f(x)$ совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику данной функции. $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому производная равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из рисунка получаем 3 точки графика, в которых производная равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: 3.

8. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т.е. $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 = 4\pi$; $r^2 = 4$; $d = 2r = 4$.

Ответ: 4.

Часть 2

9. $\frac{\log_3 25}{\log_3 65} + \frac{\log_{\sqrt{7}} 13}{\log_7 65} = \log_{65} 25 + \log_{65} 169 =$

$= \log_{65}(25 \cdot 169) = \log_{65}(5 \cdot 13)^2 = 2.$

Ответ: 2.

10. Скорость материальной точки описывается уравнением $s'(t) = 2t - 4$. Решим уравнение $2t - 4 = 2$; $t = 3$.

Ответ: 3.

11. По условию задачи составим уравнения. Пусть искомое число равно $\overline{ab}$, тогда

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a+b) + 6 \\ 10a + b = ab + 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 2 \\ 10a = b(a-1) + 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 2 \\ a^2 - 7a + 12 = 0 \end{cases}.$$

Решая квадратное уравнение, находим корни: $a = 3$ и $a = 4$. Им соответствуют $b = 4$ и $b = 6$. Итак, получаем числа 34 и 46, но $3 \cdot 4 = 12 < 22$, поэтому подходит только одно число 46.

Ответ: 46.

12. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = 4x^3 - 4x = 0;\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Во второй и третьей точке производная меняет знак с минуса на плюс (проверьте самостоятельно!), поэтому $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ являются точками минимума (а первая найденная точка является точкой максимума). Значения функции в точках минимума равны 2. Так как это локальный экстремум, то надо проверить значения функции в концевых точках отрезка $[-2; 2]$: $f(-2) = f(2) = 11$. Следовательно, наименьшее значение функции равно 2.

Ответ: 2.

13. $\begin{cases} 2\cos 2x = 4\cos x - 3 \\ \sqrt{y^2 - 2y} = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 2 = 4\cos x - 3 \\ \sqrt{y^2 - 2y} = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x \end{cases}.$

Сделаем замену в первом уравнении системы $t = \cos x$ и решим квадратное уравнение

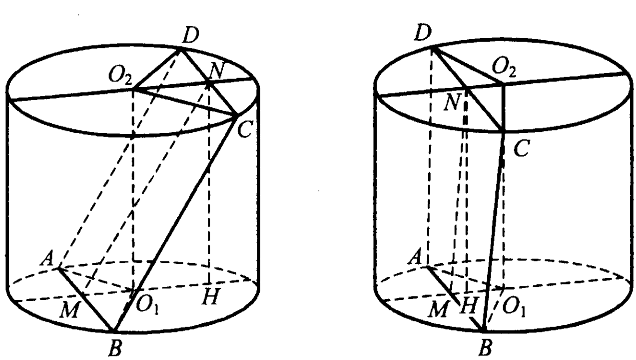
$$4t^2 - 4t + 1 = 0;\ t = \frac{1}{2}.$$

Так как $t = \cos x$, то $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Поскольку $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x = \sqrt{y^2 - 2y} \geq 0$, то подходит только $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Подставим значение x в первое уравнение системы и получим $\sqrt{y^2 - 2y} = 1$; $y^2 - 2y - 1 = 0$; $y_1 = 1 + \sqrt{2}$; $y_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 1 \pm \sqrt{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

14.



По условию $AB = 6$ и $CD = 8$, радиус оснований равен 5 и $NH = 7$. Возможны две ситуации, отраженные на рисунке. Требуется найти $\operatorname{tg}\angle NMH$. Треугольники CNO_2 и BMO_1 прямоугольные и $CN = \frac{CD}{2}$;

$MB = \frac{AB}{2}$, поэтому

$$NO_2 = \sqrt{(CO_2)^2 - (CN)^2} = \sqrt{25-16} = 3,$$

$$MO_1 = \sqrt{(BO_1)^2 - (MB)^2} = \sqrt{25-9} = 4.$$

Для левого рисунка имеем $\operatorname{tg}\angle NMH = \frac{NH}{MO_1 + NO_2} = 1$, а для правого $\operatorname{tg}\angle NMH = \frac{NH}{MO_1 - NO_2} = 7$.

Ответ: 1 или 7.

15. Выпишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} \log_{0,2}\log_{32}\dfrac{x+1}{x+7} > 0 \\ \log_{32}\dfrac{x+1}{x+7} > 0 \\ \dfrac{x+1}{x+7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \log_{32}\dfrac{x+1}{x+7} < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -7 \\ x > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{x+1}{x+7} < 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x+7} < 0 \\ \dfrac{31x+223}{x+7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -7 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{223}{31} \\ x < -7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{223}{31}.$$

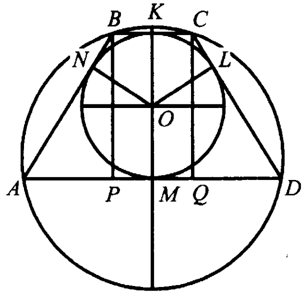
При данных значениях аргумента исходное неравенство эквивалентно неравенству: $\log_{0,2}\log_{32}\frac{x+1}{x+7} > 1 \Leftrightarrow \log_{32}\frac{x+1}{x+7} < 0,2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+7} < 2 \Leftrightarrow \frac{x+13}{x+7} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -13 \\ x < -7 \end{cases}.$$

Поскольку $x < -\frac{223}{31}$, то решением будет $x < -13$.

Ответ: $(-\infty; -13)$.

16.



По условию $AD = 16$ и $BC = 4$. Так как трапеция вписана в окружность, а BP и CQ — ее высоты, то $AP = QD = 6$. Поскольку в трапецию вписана окружность, то $AM = AN = 8$ и $BN = BK = 2$. Тогда $AB = CD = 10$.

В прямоугольном треугольнике ABP

$$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Радиус вписанной окружности равен половине отрезка BP, т.е. равен 4.

Ответ: 4.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъёмную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Преобразуем уравнение в

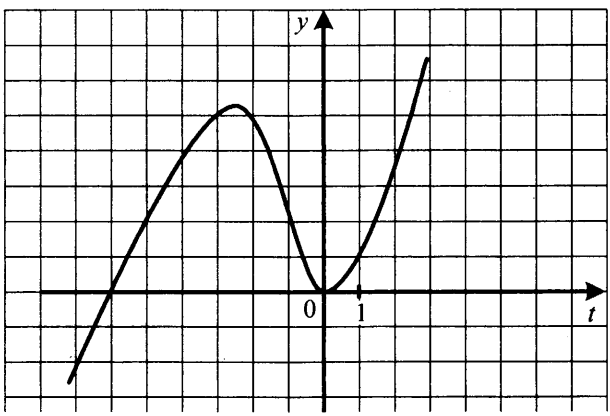
$$6\cos^2 3x + \cos^3 3x - (p+3) = 0.$$

Обозначим $\cos 3x$ через t.

Данное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда уравнение

$$t^3 + 6t^2 - (p+3) = 0$$

имеет корни, по модулю превосходящие 1. Поскольку величина $p + 3$ отвечает за параллельный перенос вдоль оси Oy графика функции $y = t^3 + 6t^2$, то из графика видно, что корни по модулю больше 1, если



$$\left[\begin{array}{l} -(p+3) > 0 \\ \begin{cases} 1+6-(p+3) < 0 \\ -1+6-(p+3) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p < -3 \\ \begin{cases} p > 4 \\ p > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p < -3 \\ p > 4 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

19. Так как $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2009 \cdot 2010$ делится на n^{n^2}, то $2010!$ делится и на n. Поэтому $n \in \{1, 2, 3, ..., 2010\}$ (иначе $2010!$ не будет делиться на n^{n^2}). Некоторое число m делится на n тогда и только тогда, когда для любого k число $m + k \cdot n$ делится на n, т.е. каждое n-ое последующее число делится на n. Следовательно, если 2010! делится на n^{n^2} и n — наибольшее число с таким свойством, то среди $\{1, 2, 3, ..., 2010\}$ должно присутствовать не более n^2 чисел, делящихся на n. А таких чисел не более, чем $\frac{2010}{n}$, поэтому

$$n^2 \leq \frac{2010}{n}; \; n^3 \leq 2010; \; n \leq 12.$$

Ответ: 12.

РЕШЕНИЯ К СБОРНИКУ ЗАДАЧ

15. $\left(2{,}1\sqrt[4]{16\sqrt[3]{4}}+1{,}9\sqrt{4\sqrt[6]{4}}\right)^{-\frac{6}{19}}=\left(2{,}1\cdot 2^{\frac{4+\frac{2}{3}}{4}}+1{,}9\cdot 2^{\frac{2+\frac{1}{3}}{2}}\right)^{-\frac{6}{19}}=$

$=\left(2^{\frac{7}{6}}(2{,}1+1{,}9)\right)^{-\frac{6}{19}}=\left(2^{\frac{19}{6}}\right)^{-\frac{6}{19}}=2^{-1}=0{,}5.$

Ответ: 0,5.

70. $7\pm 4\sqrt{3}=2^2\pm 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$

Ответ: 4.

116. $\sqrt{5-a}+\sqrt{7-a}=\dfrac{(5-a)-(7-a)}{\sqrt{5-a}-\sqrt{7-a}}=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Ответ: –1.

174. $\dfrac{\sin 12x+\sin 8x+\sin 10x+\sin 9x+\sin 11x}{\cos 12x+\cos 8x+\cos 10x+\cos 9x+\cos 11x}=$

$=\dfrac{2\sin 10x\cdot\cos 4x+\sin 10x+2\sin 10x\cdot\cos 2x}{2\cos 10x\cdot\cos 4x+\cos 10x+2\cos 10x\cdot\cos 2x}=$

$=\dfrac{\sin 10x(2\cos 4x+1+2\cos 2x)}{\cos 10x(2\cos 4x+1+2\cos 2x)}=\dfrac{\sin 10x}{\cos 10x}\cos 10x=\operatorname{tg} 10x.$

Ответ: tg $10x$.

186. $\cos 10°=-\cos 170°$, $\cos 20°=-\cos 160°$, ..., $\cos 80°=-\cos 100°$, $\cos 90°=0\ \Rightarrow\ \cos 10°+\cos 20°+\ldots+\cos 180°=\cos 180°=-1$.

Ответ: –1.

199. $\left(\log_3 28\cdot\log_{154}3+\log_{17}11\cdot\log_{154}17-\log_5 2\cdot\log_{154}5\right)^2+7=$

$=\left(\dfrac{\log_3 28}{\log_3 154}+\dfrac{\log_{17}11}{\log_{17}154}-\dfrac{\log_5 2}{\log_5 154}\right)^2+7=$

$=\left(\log_{15}28+\log_{154}11-\log_{154}2\right)^2+7=\left(\log_{154}\left(\dfrac{28\cdot 11}{2}\right)\right)^2+7=$

$=\log^2_{154}154+7=8$.

Ответ: 8.

230. $\sqrt{\sqrt{\log_2^4 3+\log_3^4 2+2}-2}=\sqrt{\sqrt{\left(\log_2^2 3+\log_3^2 2\right)^2}-2}=$

$=\sqrt{\log_2^2 3+\log_3^2 2-2}=\sqrt{\left(\log_2 3-\log_3 2\right)^2}=\log_2 3-\log_3 2$.

Ответ: $\log_2 3-\log_3 2$.

231. $\dfrac{\log_2^2 3+\log_2 9\cdot\log_2 5-3\log_2^2 5}{\log_2 3+3\log_2 5}=\dfrac{\log_2^2 3+2\log_2 3\cdot\log_2 5-3\log_2^2 5}{\log_2 3+3\log_2 5}=$

$=\dfrac{\left(\log_2 3+3\log_2 5\right)\left(\log_2 3-\log_2 5\right)}{\log_2 3+3\log_2 5}=\log_2 3-\log_2 5=\log_2\dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\log_2\dfrac{3}{5}$.

300. ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{1+x}{x}\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\ x\le -1\end{array}\right.$;

$t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\Rightarrow t^2+t-6=0\Rightarrow t_1=-3, t_2=2$.

Так как $t\ge 0$, то подходит только $t=2$.

$\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=3\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x=\dfrac{1}{3}$.

341. $\cos^2 x+|\cos x|-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ (\cos x+2)(\cos x-1)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ (\cos x-2)(\cos x+1)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

392. ОДЗ: $\begin{cases}x+a+1>0\\ x+a+1\ne 1\\ \dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-a-1<x<-a\\ x>-a\end{array}\right.\\ 2ax>6a-3\end{cases}$.

1. $a=0 \Rightarrow$ ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}-1<x<0 \\ x>0\end{array}\right.$

$$(2x-2)\log_{x+1}\left(\frac{3}{x^2-6x+12}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \\ x^2-6x+12=3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \\ x=3\end{array}\right. \Rightarrow 2 \text{ решения}$$

2. $a \neq 0 \Rightarrow$

$$(2x-a-2)\log_{x+a+1}\left(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a+2}{2} \\ x^2-6x+12=2ax-6a+3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a+2}{2} \\ x^2-2(3+a)x+9+6a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a+2}{2} \\ x=3 \\ x=3+2a\end{array}\right.,$$

$$\frac{a+2}{2}=3+2a \Leftrightarrow a=-\frac{4}{3} \Rightarrow \text{ОДЗ: } \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3}<x<\dfrac{33}{8}\end{array}\right.,$$

но $x=3+2a=\frac{1}{3} \Rightarrow 1$ решение $x=3$,

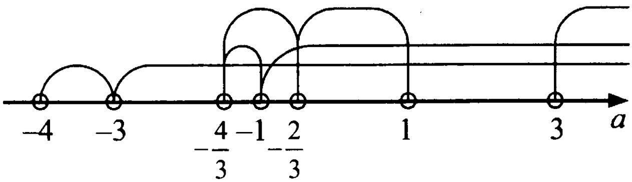
$\frac{a+2}{2}=3 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow$ ОДЗ: $x>\frac{21}{8} \Rightarrow 2$ решения,

$x=3, x=11$.

$$x=\frac{a+2}{2} \Rightarrow \begin{cases}-a-1<\dfrac{a+2}{2}<-a \\ \dfrac{a+2}{2}>-a \\ 2a\left(\dfrac{a+2}{2}\right)>6a-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<a<-\dfrac{2}{3} \\ a>-\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}a>3 \\ a<1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<a<-\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3}<a<1 \\ a>3\end{array}\right.,$$

$$x=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-a-1<3<-a \\ a>-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<a<-3 \\ a>-3\end{array}\right.,$$

$$x = 3 + 2a \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -a-1 < 3+2a < -a \\ 3+2a > -a \end{array}\right. \\ 2a(3+2a) > 6a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < a < -1 \\ a > -1 \end{array}\right..$$



Итак, получаем, что два различных решения возможны при $a=-1$, $a=-\frac{2}{3}$, $a\in[1;3]$. Кроме того подходят $a=0$ и $a=4$.

Ответ: $a\in\left\{-1;-\frac{2}{3};0;4\right\}\cup(1;3]$.

422. $\begin{cases} \sqrt{x-2}+5=y \\ y^2-10\sqrt{x-2}=2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=y-5 \\ y^2-10(y-5)=2(y-5)^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=y-5 \\ y^2-10y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ \sqrt{x-2}=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=9 \\ \sqrt{x-2}=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=9 \end{cases}.$$

ОДЗ: $x\geq -1$.

450. Решим первое уравнение системы.

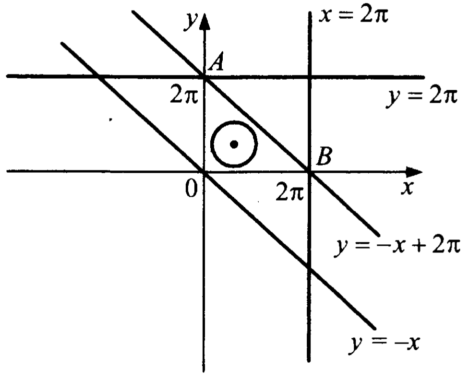
$\sin x+\sin y=\sin(x+y)$; $\sin x+\sin y=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin x(1-\cos y)+\sin y(1-\cos x)=0$

$\sin x\cdot 2\sin^2\frac{y}{2}+\sin y\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}=0$; $4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2}=0 \\ \sin\frac{y}{2}=0 \\ \operatorname{ctg}\frac{y}{2}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\pi n \\ \frac{y}{2}=\pi l \\ \frac{y}{2}=-\frac{x}{2}+\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n \\ y=2\pi l \\ y=-x+2\pi m \end{array}\right., n, l, m\in\mathbb{Z}.$$

Решениями первого уравнения являются прямые, а второго — это окружность с центром в точке (a, b) и радиусом k. Изобразите данную ситуацию на рисунке.

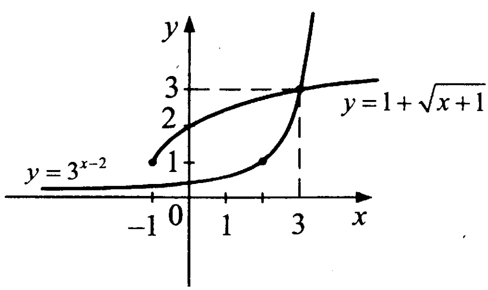


Система не будет иметь решения, если окружность целиком лежит внутри треугольника AOB. Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник AOB. Так как он равнобедренный с боковой стороной равной 2π и прямоугольный, то $R = \dfrac{2\pi}{2+\sqrt{2}} \approx 1{,}84$.

Следовательно, если $k = 1$, то всегда найдется пара (a, b) такая, что окружность с центром (a, b) целиком лежит внутри некоторого треугольника, т.е. система не имеет решений.

Ответ: 1.

506.



Построив графики функций $y = 3^{x-2}$ и $y = 1+\sqrt{x+1}$, находим решение: $-1 \le x < 3$.

Ответ: $x \in [-1; 3)$.

507. Сравним $9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)<1$.

$$9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}\right)=9(5-4)=9,$$

$$\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}<\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{27}=9.$$

Значит, $9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)>1$.

Тогда

$$0<\log_{11}\left(\left|2x^2+2ax-7\right|+2\right)\le 1,$$

$$1<\left|2x^2-2ax-7\right|+2\le 11,$$

$$\left|2x^2-2ax-7\right|\le 9,$$

$$-9\le 2x^2-2ax-7\le 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-ax-8\le 0 \\ x^2-ax+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-\sqrt{a^2+32}}{2}\le x\le \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} \\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\le x\le \dfrac{a+\sqrt{a^2+32}}{2} \end{array}\right..$$

Неравенство справедливо при всех $x\in[-4;\,2]$, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} \\ \dfrac{a-\sqrt{a^2+32}}{2}\le -4 \\ \dfrac{a+\sqrt{a^2+32}}{2}\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ \sqrt{a^2+32}\ge a+8 \Leftrightarrow a=-2. \\ \sqrt{a^2+32}\ge 4-a \end{cases}$$

Ответ: $a=-2$.

570. Так как $\sqrt[4]{x^5-3x^2+8}\ge 0$ и $\sqrt{\lg(x^2-x-5)}\ge 0$, то $y=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^5-3x^3+8=0 \\ \lg(x^2-x-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^4-2x^3+x^2-2x+4)=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x^4-2x^3+x^2-2x+4)=0\\(x+2)(x-3)=0\end{cases},$$

т.к. $x=3$ не является корнем $x^4-2x^3+x^2-2x+4$, то $x=-2$.

Ответ: -2.

571. Так как $\sqrt[6]{x^4+3x^3+8}\ge 0$ и $\arcsin^2(x^2+2x)\ge 0$, то $y=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^4+3x^3+8=0\\\arcsin^2(x^2+2x)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x^3+x^2-2x+4)=0\\x^2+2x=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x^3+x^2-2x+4)=0\\(x+2)x=0\end{cases}.$$

т.к. $x=0$ не является корнем x^3+x^2-2x+4, то $x=-2$.

Ответ: -2.

602. Так как $\sin x\le 1$ и равенство достигается при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то имеем: $y=2\sqrt{9\sin^2 x+6\sin x+13}\le 2\sqrt{9+6+13}=4\sqrt{7}$. Тогда наибольшее целое значение равно 10.

Ответ: 10.

822. $\int \ln x dx = x\ln x-\int x d(\ln x)=x\ln x-\int dx = x\ln x - x$

$F(1)=0\Rightarrow F(x)=x\ln x-x+1$.

Ответ: $x\ln x-x+1$.

842. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x dx = x\cdot\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x d(\sin^2 x)=\frac{\pi}{24}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x\cdot 2\sin x\cos x dx=$

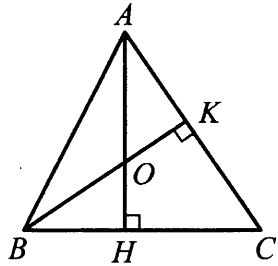
$$=\frac{\pi}{24}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x\cdot\sin 2x dx=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x d(\cos 2x)=$$

$$=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x dx=$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

864.



$AH \perp BC \Rightarrow \Delta AHC$ — прямоугольный,

$AB = AC \Rightarrow BH = HC = \frac{1}{2}BC = 4\sqrt{5}$.

$AB = AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 20$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}BK \cdot AC \Rightarrow BK = \frac{AH \cdot BC}{AC} = 16$.

ΔABK — прямоугольный $\Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 12$,

ΔAOK и ΔACH — подобны по острому углу $\Rightarrow \frac{AK}{OK} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow$

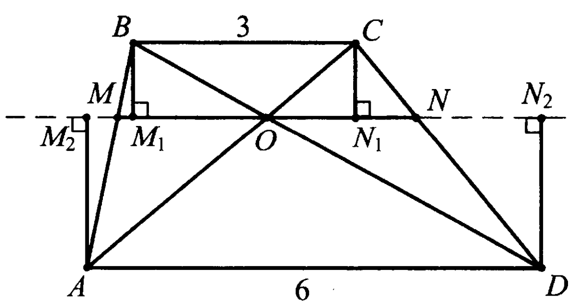
$\Rightarrow OK = \frac{AK \cdot CH}{AH} = 6$.

ΔABC — равнобедренный $\Rightarrow \Delta AOB = \Delta AOC$.

$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}OK \cdot AC = 60$.

Ответ: 60.

901.



Проведем прямую MN, $MN \parallel BC$ и $O \in MN$.

$BM_1 \perp MN$, $CN_1 \perp MN$

$AM_2 \perp MN$, $CN_2 \perp MN$

$\Rightarrow BM_1 = CN_1 = h_1$, $AM_2 = DN_2 = h_2$, где $h = h_1 + h_2$.

Это высота трапеции.

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}h_1 MO + \frac{1}{2}h_2 MO + \frac{1}{2}h_1 NO + \frac{1}{2}h_2 NO =$$

$$= \frac{1}{2}(h_1 + h_2)MN = \frac{1}{2}hMN = 40 \Rightarrow h = \frac{80}{MN}.$$

$$\Delta AM_2O \infty \Delta CN_1O \Rightarrow \frac{M_2O}{ON_1} = \frac{h_2}{h_1},$$

$$\Delta DN_2O \infty \Delta BM_1O \Rightarrow \frac{N_2O}{OM_1} = \frac{h_2}{h_1},$$

$$OM_1 = x_1,\ ON_1 = x_2 \Rightarrow OM_2 = \frac{h_2}{h_1}x_1,\ ON_2 = \frac{h_2}{h_1}x_2,$$

$$x_1 + x_2 = OM_1 + ON_1 = M_1N_1 = BC = 3,$$

$$6 = AD = M_2N_2 = OM_2 + ON_2 = \frac{h_2}{h_1}x_1 + \frac{h_2}{h_1}x_2 = \frac{h_2}{h_1}(x_1 + x_2) =$$

$$= 3\frac{h_2}{h_1} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = 2.$$

$$\Delta AOM_2 \infty \Delta ACB \Rightarrow \frac{OM}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AO}{AO + OC} = \frac{1}{1 + \dfrac{OC}{AO}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow OM = 2.$$

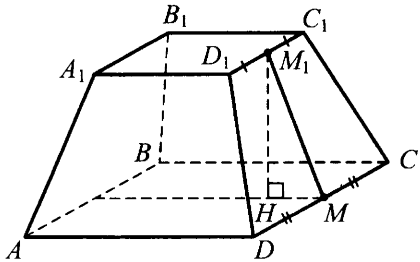
Аналогично находим

$$\frac{ON}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow ON = 2 \Rightarrow MN = OM + ON = 4.$$

$$h = \frac{80}{MN} = 20.$$

Ответ: 20.

1034.



Так как площади оснований равны 4 и 10, то стороны оснований $a = 2$ и $b = 10$.

Пирамида правильная, поэтому радиусы окружностей, вписанные в основания, равны $R_1 = \frac{a}{2} = 1$ и $R_2 = \frac{b}{2} = 5$.

Найдем высоту M_1H. по условию апофема $MM_1 = 5$.

$$MH = \frac{1}{2}(b - a) = 4.$$

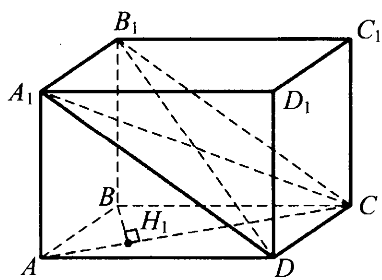
ΔMHM_1 — прямоугольный, поэтому $M_1H = \sqrt{MM_1^2 - MH^2} = 3$.

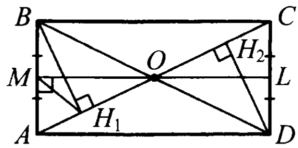
Путь S_1, S_2 — площади оснований усеченного конуса, тогда $S_1 = \pi R_1^2 = \pi$; $S_2 = \pi R_2^2 = 25\pi$ и объем усеченного конуса равен

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right) M_1 H = 31\pi.$$

Ответ: 31π.

1038.





Обозначим стороны основания через a и b.

$$AB = DC = a$$

$$BC = AD = b.$$

По условию $BH_1 = DH_2 = 15$. Так как ΔABC и ΔADC — прямоугольные и $BH_1 \perp AC$, $DH_2 \perp AC$ $\Rightarrow AH_1 = 15\frac{a}{b} = CH_2$

$$CH_1 = 15\frac{b}{a} = AH_2 \Rightarrow H_1H_2 = 15\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right).$$

Радиус описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности $R = AO = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} MO \perp AB \text{ и } BH_1 \perp AO \Rightarrow MH_1 \parallel BO \\ AM = BM \end{array}\right\} \Rightarrow AH_1 = H_1O = \frac{1}{2}H_1H_2$$

$$15\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \cdot 15\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{3a}{b} = \frac{b}{a}$$

$$b^2 = 3a^2$$

Площадь прямоугольника $ABCD$:

$$\left.\begin{array}{l} S = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = BH_1 \cdot AC = 15\sqrt{a^2 + b^2} = 30a \\ S = ab = a^2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a = 10\sqrt{3}$$

$$R = AO = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = a = 10\sqrt{3}$$

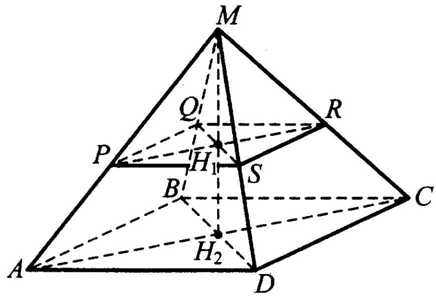
ΔAA_1C — прямоугольный

$$\Rightarrow AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{35^2 - \left(20\sqrt{3}\right)^2} = 5$$

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 \cdot AA_1 = 1500\pi$.

Ответ: 1500π.

1041.



Пусть сторона основания пирамиды $MPQRS$ равна a, тогда радиус цилиндра $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Но нижнее основание цилиндра вписано в квадрат $ABCD$, поэтому $R=\frac{AB}{2}=2\Rightarrow a=2\sqrt{2}$.

Объем цилиндра $V_ц=\pi\cdot R^2\cdot H_1H_2=4\pi\cdot H_1H_2=12\pi$.

Значит, $H_1H_2=3$.

$\Delta AMB\infty\Delta PMQ\Rightarrow\frac{PM}{AM}=\frac{PQ}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta AMH_2\infty\Delta PMH_1\Rightarrow\frac{MH_1}{MH_2}=\frac{PM}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$MH_2=MH_1+H_1H_2=MH_1+3=\sqrt{2}MH.$

Тогда $MH_1=\frac{3}{\sqrt{2}-1}$.

Объем пирамиды $MPQRS$ $V=\frac{1}{3}S_{PQRS}\cdot MH_1=\frac{8}{\sqrt{2}-1}=8\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Ответ: $8\left(1+\sqrt{2}\right)$.

ОТВЕТЫ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ ТЕСТАМ

Вариант 1

1	2	**8**	14	**15**	$\left(-\sqrt{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$
2	4	**9**	36	**16**	б) $\frac{49}{240}$
3	164,25	**10**	8	**17**	68445
4	0,92	**11**	8	**18**	$a\in\left[-\frac{1}{7};-\frac{1}{9}\right)\cup\{0\}$
5	0	**12**	1	**19**	8
6	65	**13**	а) $2\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ б) $0;\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$		
7	4	**14**	$\sqrt{2}$		

Вариант 2

1	34	**8**	4,5	**15**	$(-8;-7)\cup[1;1,5)\cup(3;3,5]$
2	4	**9**	5	**16**	б) $\frac{4}{21}$
3	7	**10**	2	**17**	842579,5
4	0,9615	**11**	10	**18**	$a\in\left(0;\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$
5	–3	**12**	–2		
6	3	**13**	а) $\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ б) $-\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ 0$		
7	11	**14**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		

Вариант 3

1	11200	**8**	9	**15**	(3; 4]
2	4	**9**	0,1	**16**	б) 12
3	0,9	**10**	75	**17**	73205
4	0,08	**11**	2,5	**18**	$a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$
5	12	**12**	11	**19**	$(1;1007);(19;53);(53;19);$ $(1007;1)(-1;-1007);$ $(-19;-53);(-53;-19);$ $(-1007;-1)$
6	7	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{5\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}$		
7	2	**14**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Вариант 4

1	22000	**8**	4	**15**	(0; 1]
2	3,5	**9**	8	**16**	б) $\frac{5}{6}$
3	14	**10**	13,75	**17**	5
4	0,9375	**11**	25	**18**	$a = e^{-\frac{1}{e}}$ или $a > 1$
5	1,6	**12**	–1	**19**	13
6	62	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \mathrm{arctg}2+\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\mathrm{arctg}2;\mathrm{arctg}2+\pi$		
7	–3	**14**	$\frac{\sqrt{10}}{4}$		

Вариант 5

1	4	**8**	6	**15**	$\{-2\}\cup[-1;\ 2]$
2	9	**9**	10,5	**16**	б) 1,5
3	140	**10**	2	**17**	6
4	0,001	**11**	90	**18**	$a\in(1,5;\ 2]\cup[3;\ 3,5)$
5	–0,75	**12**	–24,2	**19**	$(7k+2; 7k^2+4k+1)$; $(7k+5; 7k^2+10k+4)$, $k\in\mathbb{Z}$
6	12	**13**	а) $\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ б) $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi;\ 5\pi$		
7	–3	**14**	$\sqrt{3}$		

Вариант 6

1	3	**8**	60	**15**	$(-\infty;-9)\cup(3;+\infty)$
2	6	**9**	3	**16**	б) 48
3	4	**10**	2	**17**	51529
4	20	**11**	12	**18**	$k=2$
5	–6	**12**	–2	**19**	(23; 3)
6	17	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$		
7	2	**14**	60°		

Вариант 7

1	21000	**8**	100	**15**	$(-5;-4)\cup\{5\}$
2	10	**9**	3	**16**	б) 12,4
3	20	**10**	62,5	**17**	691200
4	0,006	**11**	154	**18**	$a\in(1;\ 2)$
5	8	**12**	4,75		
6	2	**13**	а) $-1;\ \log_3 2-1$ б) -1		
7	1,5	**14**	0,3		

Вариант 8

1	200	**8**	2	**15**	$(-2;1)\cup(1;4)$
2	12	**9**	1,8	**16**	б) 1,6
3	10,5	**10**	27,5	**17**	585640
4	0,9702	**11**	48	**18**	$a\in\left(1;\ e^{\frac{1}{e}}\right)$
5	2	**12**	4,5	**19**	4
6	0,8	**13**	а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\quad n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}$		
7	37	**14**	100π		

Вариант 9

1	15000	**8**	18	**15**	$(-1;-0,5)\cup(1;2)$
2	3	**9**	3	**16**	б) 5
3	6,5	**10**	1	**17**	5
4	0,75	**11**	3	**18**	$a\in(-\infty;-0,25)$
5	0,8	**12**	1	**19**	$(3k+1;3k^2+2k+1)$; $(3k+2;3k^2+4k+2),k\in\mathbb{Z}$
6	–0,75	**13**	а) $\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n;$ $n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3};0$		
7	3	**14**	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{65}}{13}$		

Вариант 10

1	48	**8**	6	**15**	$(-\infty;\,-5)\cup\left(-5;-2\sqrt{6}\right)\cup$ $\cup\left(2\sqrt{6};5\right)\cup(5;+\infty)$
2	7	**9**	2	**16**	б) 17,6
3	56	**10**	8	**17**	7
4	0,53	**11**	200	**18**	$a\in(6;\,7]$
5	86	**12**	24	**19**	(2; 3)
6	8	**13**	а) $-\frac{\pi}{3}+\pi n;\, n\in\mathbb{Z};$ б) $-\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}$		
7	–5	**14**	$2\sqrt{13}$		

Вариант 11

1	4	**8**	150	**15**	3/4
2	6	**9**	2	**16**	6
3	24	**10**	3	**17**	68445
4	0,5	**11**	10	**18**	3
5	0	**12**	–6	**19**	(23; 3)
6	9	**13**	$(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\,1),\ \ n\in\mathbb{Z}$		
7	–1	**14**	$1+\sqrt{2}$		

Вариант 12

1	5	**8**	54	**15**	$(0;\frac{1}{32})\cup(\frac{1}{2};\frac{3}{2})\cup(2;\,3)$
2	6	**9**	4	**16**	54
3	24	**10**	3	**17**	842579,5
4	0,5	**11**	8	**18**	2
5	28	**12**	0,5	**19**	(5; 1), (8; 2)
6	4	**13**	$((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\,2),\ \ n\in\mathbb{Z}$		
7	2	**14**	$3+2\sqrt{3}$		

Вариант 13

1	3	**8**	13	**15**	$(-8;5)\cup[1;1,5)\cup(3;3,5]$
2	3	**9**	3	**16**	50
3	28	**10**	1	**17**	73205
4	0,57	**11**	12	**18**	3
5	5	**12**	–2,5	**19**	(11; 1), (44; 2)
6	3	**13**	$(2\pi n;-1),\ n\in\mathbb{Z}$		
7	–2	**14**	75		

Вариант 14

1	5	**8**	5	**15**	$\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$
2	4	**9**	5	**16**	10
3	12	**10**	1	**17**	5
4	0,2	**11**	15	**18**	4
5	12	**12**	–0,75	**19**	(6; 2), (16; 3)
6	7	**13**	$\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;1\right),\ n,k\in\mathbb{Z}$		
7	0, 5	**14**	12		

Вариант 15

1	3	**8**	2	**15**	$\left[1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right]$
2	6	**9**	5	**16**	8
3	28	**10**	3	**17**	6
4	0,11	**11**	–0,8	**18**	8
5	–11	**12**	13	**19**	(4; 3), (18; 4)
6	6	**13**	$\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;0,5\right),\ n\in\mathbb{Z}$		
7	1	**14**	27		

Вариант 16

1	5	**8**	1	**15**	$\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$
2	4	**9**	25/3	**16**	120
3	15	**10**	2	**17**	51529
4	0,03	**11**	75	**18**	3
5	9	**12**	4, 5	**19**	(3; 2), (2; 3)
6	5	**13**	$\left(2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\right); n, k \in \mathbb{Z}$		
7	1	**14**	36		

Вариант 17

1	5	**8**	6	**15**	(–1; 4)
2	5	**9**	8	**16**	2
3	12	**10**	1	**17**	691200
4	0,2	**11**	50	**18**	7
5	3	**12**	1	**19**	(2; 2)
6	3	**13**	$\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right); n, k \in \mathbb{Z}$		
7	4	**14**	96		

Вариант 18

1	5	**8**	3	**15**	$\left(-2-\sqrt{5}; -4\right) \cup \left(-1; -2+\sqrt{5}\right)$
2	10	**9**	169	**16**	14, 4
3	16	**10**	1	**17**	585640
4	0,25	**11**	1,5	**18**	2
5	20	**12**	–7	**19**	(1; 4)
6	7	**13**	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k\right);$ $n, k \in \mathbb{Z}$		
7	–0, 5	**14**	4, 5		

Вариант 19

1	7	**8**	8	**15**	(1; 4)
2	5	**9**	20	**16**	4
3	12	**10**	2	**17**	5
4	0,25	**11**	90	**18**	(1; 2)
5	14, 5	**12**	–4	**19**	(2; 3)
6	5	**13**	$\left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); n, k \in Z$		
7	1	**14**	0, 5		

Вариант 20

1	4	**8**	1	**15**	0, 09
2	4	**9**	14	**16**	84
3	24	**10**	3	**17**	7
4	0,5	**11**	50	**18**	(6; 7]
5	57	**12**	–4	**19**	(4; 3)
6	5	**13**	$\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); n, k \in \mathbb{Z}$		
7	–1	**14**	$4\sqrt{3}$		

Вариант 21

1	880	**8**	6	**15**	$(-\infty; -3) \cup (-1-\sqrt{2}; -2) \cup$ $\cup (0; \sqrt{2}-1) \cup (1; +\infty)$
2	2	**9**	1	**16**	9
3	20	**10**	4	**17**	68445
4	0,996	**11**	8	**18**	$[5;9)$
5	15	**12**	4	**19**	(5; 1), (5; –1), (–3; 3), (–3; –3)
6	12	**13**	$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}; \quad y = -\frac{1}{2}$		
7	2	**14**	30°		

Вариант 22

1	856	**8**	9	**15**	$\{1/2\} \cup [1; +\infty)$
2	3	**9**	1	**16**	12
3	16	**10**	1	**17**	842579,5
4	0,6	**11**	3	**18**	$\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$
5	6	**12**	6	**19**	(–4; 3), (–4; –3)
6	$\sqrt{11}$	**13**	$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $y = \frac{1}{4}$		
7	4	**14**	60°		

Вариант 23

1	440	**8**	4	**15**	$(-\infty; -1,5] \cup \{5\}$
2	1	**9**	3	**16**	3
3	18	**10**	2	**17**	73205
4	0,45	**11**	10	**18**	$(-\infty; -0,25)$
5	13	**12**	28	**19**	(22; 2), (22; –2), (–2; 4), (–2; –4)
6	2	**13**	$x = -1$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$		
7	3	**14**	45°		

Вариант 24

1	402	**8**	4	**15**	$(-1; -0,5) \cup (1; 2)$
2	7	**9**	5	**16**	4
3	12	**10**	3	**17**	5
4	0,5	**11**	18	**18**	$(0;1) \cup (1;2] \cup [4;5)$
5	2	**12**	2	**19**	(10; 1), (10; –1), (40; 2), (40; –2), (–10; 3), (–10; –3), (–2; 5), (–2; –5)
6	3	**13**	$x = 2$; $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$		
7	2	**14**	30°		

Вариант 25

1	896	**8**	2	**15**	$(-\infty; 3) \cup (4; 5) \cup (5; 6) \cup (7; +\infty)$
2	2	**9**	2	**16**	8
3	20	**10**	1	**17**	6
4	0,01	**11**	8	**18**	(1; 2)
5	–23	**12**	–1	**19**	(20; 1), (20; –1), (–40; 2), (–40; –2)
6	4	**13**	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; y = 2$		
7	3	**14**	60°		

Вариант 26

1	34	**8**	9	**15**	(–2/3; 2]
2	6	**9**	10	**16**	15
3	20	**10**	2	**17**	51529
4	0,03	**11**	36	**18**	$(1{,}5; 2] \cup [3; 3{,}5)$
5	13	**12**	–14	**19**	(1; 2), (1; –2), (–1; 2), (–1; –2), (2; 1), (2; –1), (–2; 1), (–2; –1)
6	5	**13**	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $y = \frac{1}{2}$		
7	–2	**14**	0, 24		

Вариант 27

1	40	**8**	9	**15**	(0; 3) ∪ [4; 12)
2	6	**9**	2	**16**	18
3	25	**10**	1	**17**	691200
4	0,005	**11**	36	**18**	(2; 14)
5	–20	**12**	–4	**19**	(2; 2), (2; –2), (–2; 2), (–2; –2)
6	1	**13**	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k\right);\ n, k \in \mathbb{Z}$		
7	0	**14**	0, 3		

Вариант 28

1	45	**8**	3	**15**	$[2; +\infty)$
2	8	**9**	4	**16**	24
3	12	**10**	2	**17**	585640
4	0,005	**11**	36	**18**	$(3;5]\cup(7;9)$
5	–5	**12**	2	**19**	(0; 3), (0; –3), (3; 0), (–3; 0)
6	6	**13**	$\left\{\left(\pi n; \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$ $\cup \left\{\left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}\right\}$		
7	1	**14**	0, 2		

Вариант 29

1	89	**8**	6	**15**	$(0; 1) \cup (2; 4) \cup (6; 12)$
2	10	**9**	10	**16**	18
3	20	**10**	1	**17**	5
4	0,984	**11**	18	**18**	$(-\infty; -5)\cup(5; +\infty)$
5	8	**12**	–19	**19**	(1; 3), (1; –3), (–1; 3), (–1; –3), (3; 1), (3; –1), (–3; 1), (–3; –1)
6	5	**13**	$(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$		
7	0	**14**	0, 5		

Вариант 30

1	26	**8**	4,5	**15**	(–1; 1)
2	10	**9**	25	**16**	13, 5
3	16	**10**	2	**17**	7
4	0,375	**11**	18	**18**	(2; 2, 25)
5	1, 75	**12**	–14	**19**	(2; 3), (2; –3), (–2; 3), (–2; –3), (3; 2), (3; –2), (–3; 2), (–3; –2)
6	11	**13**	$(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$		
7	1	**14**	0, 75		

Вариант 31

1	4050	**8**	3	**15**	$\left(1-\sqrt{2};0\right)\cup\left(2;1+\sqrt{2}\right)$
2	8	**9**	0	**16**	24, 5
3	16	**10**	1, 25	**17**	68445
4	0,125	**11**	1, 5	**18**	$\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$
5	1, 5	**12**	11	**19**	13
6	4	**13**	$(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;1),\ n\in\mathbb{Z}$		
7	3	**14**	$\frac{21}{17}$ или 3		

Вариант 32

1	9720	**8**	1	**15**	$(-1/3;\ 0)\cup(1;\ 5)$
2	7	**9**	2	**16**	36
3	10	**10**	1	**17**	842579,5
4	0,375	**11**	12	**18**	$\frac{1}{e}$
5	–5	**12**	50	**19**	7
6	4	**13**	$(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{1}{2}),\ n\in\mathbb{Z}$		
7	2	**14**	2 или $\frac{46}{7}$		

Вариант 33

1	16000	**8**	1,5	**15**	(0, 25; 4)
2	24	**9**	1	**16**	25
3	18, 5	**10**	6	**17**	73205
4	0,25	**11**	30	**18**	0, 25
5	9, 5	**12**	47	**19**	5
6	12	**13**	$(\frac{\pi}{4}+2\pi n;-3),\ n\in\mathbb{Z}$		
7	2	**14**	3 или 21		

Вариант 34

1	864	**8**	5	**15**	(1/7; 7)
2	14	**9**	1	**16**	192
3	14	**10**	1	**17**	5
4	0,25	**11**	83	**18**	$(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$
5	5, 75	**12**	6	**19**	4
6	10	**13**	$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; 5\right), n\in\mathbb{Z}$		
7	2	**14**	2 или 14		

Вариант 35

1	5280	**8**	4	**15**	$(-\infty; -13)$
2	3	**9**	2	**16**	4
3	15	**10**	3	**17**	6
4	0,5	**11**	46	**18**	$(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$
5	0, 25	**12**	2	**19**	12
6	20	**13**	$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; 1\pm\sqrt{2}\right), n\in\mathbb{Z}$		
7	3	**14**	1 или 7		

Вариант 36

1	6240	**8**	5	**15**	$(1+2^{-28}; 2)$
2	10	**9**	5	**16**	18
3	27, 5	**10**	2	**17**	51529
4	0,125	**11**	71	**18**	$(-\infty;-4)\cup(9;+\infty)$
5	5, 5	**12**	1	**19**	6
6	6	**13**	$\left\{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi N; 0\right), n\in\mathbb{Z}\right\}\cup$ $\cup\left\{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; -1\right), n\in\mathbb{Z}\right\}$		
7	2	**14**	0, 35 или 1, 15		

Вариант 37

1	8640	**8**	7,5	**15**	(2; 8)
2	5	**9**	1	**16**	6
3	6	**10**	1	**17**	691200
4	0,875	**11**	325	**18**	$(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$
5	−10	**12**	−1	**19**	4
6	1	**13**	$\left\{\left(3\sqrt{3};\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}\right\}\cup$ $\cup\left\{\left(-3\sqrt{3};-\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}\right\}$		
7	4	**14**	0, 5 или 1		

Вариант 38

1	20160	**8**	34	**15**	$\left(-\sqrt{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\sqrt{2}\right)$
2	6	**9**	4	**16**	6
3	17	**10**	2	**17**	585640
4	0,8125	**11**	571	**18**	$(-\infty;-5)\cup(11;+\infty)$
5	8, 5	**12**	−36	**19**	3
6	7	**13**	$\left\{\left(2\sqrt{3};\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}\right\}\cup$ $\cup\left\{\left(-2\sqrt{3};-\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}\right\}$		
7	5	**14**	0, 1 или 0, 5		

ОТВЕТЫ К СБОРНИКУ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

1. 0,6. **2.** 1,5. **3.** 15. **4.** 4. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 0,3. **8.** 0,6. **9.** 0,4. **10.** 0,6. **11.** 0. **12.** 1/3. **13.** 1/6. **14.** 2/3. **15.** 0,5. **16.** 0,2. **17.** 9. **18.** 8. **19.** 1/6. **20.** 1/49. **21.** 3. **22.** 0,5. **23.** 2. **24.** 8. **25.** 8. **26.** –1. **27.** <. **28.** <. **29.** –0,4. **30.** –1,5. **31.** –1. **32.** 0,5. **33.** 1/3. **34.** 2. **35.** –0,5. **36.** –2/7. **37.** –2. **38.** 2. **39.** 1,5. **40.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **41.** –0,5. **42.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **43.** 0. **44.** $-\sqrt{2}$. **45.** $-\frac{1}{\sqrt{6}}$. **46.** 0,25. **47.** 0,5. **48.** 0,75. **49.** 0,25. **50.** – 0,25. **51.** $\sqrt{3}$. **52.** $-\sqrt{3}$. **53.** 0,25. **54.** –0,25. **55.** $\frac{4}{3}-\frac{a}{12}$. **56.** $\frac{3a}{8}-3$. **57.** 30. **58.** 12. **59.** 2,1. **60.** 14. **61.** –26. **62.** 129. **63.** 72. **64.** 108. **65.** 20. **66.** 22. **67.** –8. **68.** 6. **69.** 42. **70.** 4. **71.** 10. **72.** 6. **73.** 8. **74.** 2. **75.** 2. **76.** 6. **77.** $\frac{a}{2}$. **78.** $\frac{2}{\sqrt[7]{z}}$. **79.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{z}$. **80.** $\frac{b^2}{8}$. **81.** $\frac{2}{b^2}$. **82.** $\frac{3}{2t}$. **83.** $2\sqrt[5]{z}$. **84.** $\frac{3}{2z^2}$. **85.** $3a^2b$. **86.** $2\,a^2b^4$. **87.** 2. **88.** 0. **89.** 7. **90.** 0. **91.** $\sqrt{5}$. **92.** 23. **93.** 50. **94.** 0. **95.** 6. **96.** 10. **97.** a^3. **98.** a^2. **99.** a^4. **100.** a^8. **101.** a^2. **102.** a^2. **103.** a. **104.** a^2. **105.** a. **106.** $e^{\frac{2}{7}}$. **107.** 2. **108.** $3a$. **109.** 27. **110.** $a + 8$. **111.** $\sqrt{28}$. **112.** $2c+54c^{\frac{1}{3}}$. **113.** 0. **114.** $-\sqrt[3]{ab}$. **115.** 1. **116.** –1. **117.** –1/5. **118.** 1. **119.** 2. **120.** 4. **121.** 1. **122.** 0,25. **123.** 0,5. **124.** 0. **125.** 0,25. **126.** 3. **127.** 24. **128.** 1. **129.** 2. **130.** 30. **131.** 0. **132.** 4. **133.** 0. **134.** $a + b$. **135.** $\sqrt[7]{xy}$. **136.** –1. **137.** 5. **138.** 76. **139.** 3. **140.** 9. **141.** 3. **142.** –1. **143.** 1. **144.** 4. **145.** 2. **146.** 10. **147.** 4. **148.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **149.** 1. **150.** $\sin\alpha$. **151.** 1. **152.** 1. **153.** $\cos\beta$. **154.** $\cos(\alpha-\beta)$. **155.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. **156.** $\operatorname{tg}(x-y)$. **157.** $\sin 4\alpha$. **158.** $\sin 2\alpha$. **159.** 2. **160.** 1. **161.** $\sqrt{3}$. **162.** –1. **163.** $\sin 2\alpha$. **164.** $-\cos^2\alpha$. **165.** $-\cos 2\alpha$. **166.** $\cos^2\alpha$. **167.** 1. **168.** $\operatorname{tg}\alpha$. **169.** $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **170.** $\frac{1}{\cos\alpha}$. **171.** $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. **172.** $\sin\alpha$. **173.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3x}{4}$. **174.** $\operatorname{tg}10x$. **175.** –1. **176.** $2\cos x$. **177.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$. **178.** 1. **179.** 1. **180.** $\sin^2 x$. **181.** $\operatorname{tg}^2 2x$. **182.** 1. **183.** 1,5. **184.** 7/18. **185.** 3/8.

186. –1. **187.** $\frac{1}{2}\sin 2x$. **188.** $2\sin 2x$. **189.** $\log_{53}42$. **190.** 0. **191.** 2. **192.** 1. **193.** 3. **194.** $\log_7 3$. **195.** 9. **196.** 18,75. **197.** 1. **198.** –5. **199.** 8. **200.** 6. **201.** 2. **202.** 3. **203.** 5. **204.** 6. **205.** 4. **206.** 3. **207.** 5. **208.** 2. **209.** 4. **210.** 14. **211.** 5. **212.** 0. **213.** 40. **214.** 5. **215.** 15. **216.** 8. **217.** 7. **218.** 3. **219.** –32. **220.** 1000. **221.** 9. **222.** 2. **223.** 1. **224.** 5. **225.** 7. **226.** 3. **227.** 32. **228.** 17. **229.** 2. **230.** $\log_2 3 - \log_3 2$. **231.** $\log_2 \frac{3}{5}$. **232.** $2\log_2{}^5 - 1$. **233.** 200. **234.** 50 л и 40 л. **235.** 1494. **236.** 54. **237.** 60. **238.** 45. **239.** 56. **240.** 55. **241.** 34. **242.** 32,5. **243.** 32. **244.** 35. **245.** 26. **246.** 4,04. **247.** 19. **248.** 4,04. **249.** 21. **250.** 2544. **251.** 3640. **252.** 6620. **253.** 4160. **254.** 14 980. **255.** 33 100. **256.** 1962. **257.** 10. **258.** 20. **259.** 25. **260.** 20. **261.** 70. **262.** 36. **263.** 40. **264.** 2. **265.** 64. **266.** 81. **267.** 80 м^3. **268.** 324 км. **269.** 3330. **270.** 70 км. **271.** 680 м^3. **272.** 2400. **273.** 65. **274.** –1. **275.** 5. **276.** 11. **277.** 3. **278.** 2. **279.** –1,25. **280.** 1. **281.** 7. **282.** –1. **283.** 6. **284.** 1. **285.** 4. **286.** 3. **287.** –7. **288.** 0. **289.** 7. **290.** 1. **291.** 3. **292.** 3. **293.** 1,5. **294.** 1. **295.** 0. **296.** 1. **297.** 23. **298.** –3; –1. **299.** $\pm\sqrt{10}$. **300.** 1/3. **301.** $2\pi k, k \in Z$. **302.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **303.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **304.** $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **305.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **306.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **307.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **308.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **309.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **310.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **311.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **312.** $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **313.** 3. **314.** 4. **315.** 7. **316.** 6. **317.** 2. **318.** 4. **319.** 0. **320.** 3. **321.** 3. **322.** 7. **323.** ±1. **324.** 7. **325.** 0. **326.** $\pm\sqrt{\lg 2}$. **327.** 6. **328.** 0. **329.** 0,5. **330.** 1. **331.** 1. **332.** 2. **333.** ±3. **334.** 100; 0,001. **335.** 5. **336.** $\sqrt{2}$. **337.** 4. **338.** 101. **339.** 4;9. **340.** 1. **341.** $\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **342.** $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **343.** $\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **344.** $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **345.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **346.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **347.** 0. **348.** 1. **349.** –1. **350.** –1. **351.** 4. **352.** 0. **353.** 3. **354.** 1. **355.** –3. **356.** 0. **357.** 1. **358.** 2. **359.** –1. **360.** 1. **361.** –2. **362.** –2. **363.** 3. **364.** 5. **365.** 15. **366.** 0;1. **367.** 0. **368.** 0,5. **369.** 0,5. **370.** 3. **371.** 1. **372.** 0,5. **373.** 2,5. **374.** 1. **375.** 1. **376.** 1.

377. 2. **378.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **379.** $\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **380.** 10^{10} и 10^{-15}.
381. 10. **382.** 1. **383.** 8. **384.** 16. **385.** $\sqrt[4]{2}$. **386.** 1/25 и 25. **387.** 1/16 и 16.
388. 27. **389.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **390.** $\pm\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **391.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.
392. $\left\{-1; -\frac{2}{3}; 0; 4\right\}\cup[1;3]$. **393.** $(-4;-3)\cup\left(-3;-\frac{4}{3}\right]$. **394.** $(-4;-3)\cup$
$\cup\left(-3;-\frac{4}{3}\right]\cup\{1\}$. **395.** $(-\infty;-2)\cup\{1\}$. **396.** 0. **397.** $(-2;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup$
$\cup\left\{\frac{2}{3};2\right\}\cup[4;+\infty)$. **398.** $\left(0;\frac{4}{3}\right]\cup\{2\}$. **399.** $(-1;-0,5]\cup\{1\}$.
400. $\left(-0,5;1-\sqrt{2}\right]\cup\left\{-\frac{1}{3};0\right\}\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **401.** [3;4]. **402.** 0. **403.** 1.
404. 4/3. **405.** –1. **406.** 0,5. **407.** 5/49. **408.** 2. **409.** 0. **410.** 0. **411.** 22/3.
412. 21/25. **413.** 1. **414.** 0. **415.** ∞. **416.** 1. **417.** 1. **418.** ∞. **419.** ∞. **420.** 0.
421. (3;2) и (5;2). **422.** (18; 9). **423.** (–3; 13). **424.** 4. **425.** 80.
426. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi n\right), k,n\in\mathbb{Z}$. **427.** (3;2). **428.** (1;2). **429.** (2;–1).
430. (9;729). **431.** (–5;1). **432.** (–7;–3,5). **433.** $\left(1; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$.
434. (0,5;2). **435.** (9;3). **436.** $\left(2+2^{\frac{2}{3}}; 2+2^{\frac{4}{3}}\right)$. **437.** 0. **438.** 3. **439.** 2.
440. 0. **441.** 1. **442.** –2. **443.** 209. **444.** 6. **445.** (0;–2,5). **446.** (2;1/3).
447. (–1;4). **448.** (1;4). **449.** (3;2) и (0;0). **450.** 1. **451.** $\left(0;2-\sqrt{2}\right)$.
452. {1;2}. **453.** 6. **454.** {1;2;3}. **455.** –1. **456.** $[-3;2]\cup[5;+\infty)$.
457. $[-7;-4]\cup[6;8]$. **458.** 6. **459.** 8. **460.** 9. **461.** 4. **462.** 2. **463.** 2. **464.** 3.
465. 5. **466.** 3. **467.** 1. **468.** $(-\infty;-11)\cup[-7;7)\cup[9;+\infty)$.
469. $[-13;3]\cup[5;8)$. **470.** $(-\infty;-1)\cup[2;3]$. **471.** $(-4;-3]\cup[1;+\infty)$.
472. $(-\infty;-2)\cup(1;3]$. **473.** $\left[-2;\frac{1}{3}\right)\cup[2;+\infty)$. **474.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$.
475. $(-\infty;-2,5)\cup[-1,2;2]$. **476.** $(-2,5;-1]\cup(2;+\infty)$.
477. $[0;3]\cup(7;+\infty)$. **478.** $(-\infty;-11)\cup[-6;1]$. **479.** $(-\infty;-11]\cup(-2;7]$.
480. $[-2;1]\cup(3;+\infty)$. **481.** $(-\infty;-2]\cup(0;7]$. **482.** $[0;1)\cup(2;+\infty)$.
483. $[-1;1)\cup(2;+\infty)$. **484.** $[-2;-1)\cup[0;+\infty)$. **485.** $(-\infty;-3]\cup(4;7)$.

486. $(-\infty; -3] \cup [-2; 4)$. **487.** $(-\infty; 5]$. **488.** $[15; +\infty)$. **489.** $[-4; +\infty)$. **490.** $(-\infty; 2]$. **491.** $(-\infty; 1]$. **492.** $(-\infty; 7]$. **493.** $(3; +\infty)$. **494.** $(-\infty; 1]$. **495.** $[-4; +\infty)$. **496.** $(-\infty; -1]$. **497.** $(2; +\infty)$. **498.** $(-\infty; -11]$. **499.** (1;2). **500.** (3;4,5). **501.** $(0; +\infty)$. **502.** $(0; 3) \cup (7; +\infty)$. **503.** (3;4). **504.** $(-12; +\infty)$. **505.** $(-\infty; 1]$. **506.** [–1; 3). **507.** 2. **508.** –3. **509.** 4. **510.** –6. **511.** $(-\infty; -4)$. **512.** $[-1; 1) \cup (3; 5]$. **513.** $[12; +\infty)$. **514.** [–11; –5]. **515.** $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$. **516.** $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$. **517.** $(-\infty; -3) \cup$ $\cup (1; +\infty)$. **518.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **519.** $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. **520.** (0,5;4). **521.** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **522.** $(-\infty; -5) \cup (6; +\infty)$. **523.** (–3;4). **524.** $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$. **525.** $(\pi k - 2{,}5; \frac{\pi}{2} - 2{,}5 + \pi k), k \in \mathbb{Z}$. **526.** $[-2; 1) \cup$ $\cup (1; 2]$. **527.** $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **528.** $[2; +\infty)$. **529.** $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. **530.** $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. **531.** (0; 2]. **532.** (0; 125). **533.** $[0{,}5; +\infty)$. **534.** (0; 49]. **535.** (0; 8]. **536.** (0; 32]. **537.** (0; 25]. **538.** $\left[\frac{1}{125}; +\infty\right)$.

539. $(\frac{1}{9}; +\infty)$. **540.** 5. **541.** 35. **542.** 26. **543.** 5. **544.** 1. **545.** 12. **546.** 8. **547.** 3. **548.** 3. **549.** 2. **550.** [3;4]. **551.** $(-\infty; +\infty)$. **552.** $[e; +\infty)$. **553.** $[0; +\infty)$. **554.** [–1/2;1]. **555.** [3;5]. **556.** [–4;6]. **557.** [–1;7). **558.** [–2;6]. **559.** [3;7]. **560.** 4,5. **561.** $6\frac{1}{2}$. **562.** 3,5. **563.** 3,8. **564.** 2,8. **565.** 2,5. **566.** 2,8. **567.** 4,8. **568.** 6,2. **569.** 3,5. **570.** –2. **571.** –2. **572.** –3. **573.** 3. **574.** –3. **575.** –3. **576.** – 5. **577.** –4. **578.** 5. **579.** –4. **580.** 2. **581.** 2. **582.** 3,2. **583.** –13. **584.** 5. **585.** 3. **586.** –7. **587.** –0,2. **588.** 4. **589.** 3. **590.** 5. **591.** 4. **592.** 5. **593.** 3. **594.** 4. **595.** 3. **596.** 5. **597.** 3. **598.** 5. **599.** 2 корня. **600.** 4. **601.** 7. **602.** 10. **603.** 8. **604.** 12. **605.** 2. **606.** 8. **607.** 2. **608.** 4. **609.** 8. **610.** 10. **611.** 1. **612.** –3. **613.** –19. **614.** –2. **615.** –13. **616.** –1. **617.** –11. **618.** –1. **619.** –28. **620.** –3. **621.** –8. **622.** 1. **623.** 10. **624.** 1,8. **625.** 2. **626.** 1. **627.** 1. **628.** 5. **629.** 4. **630.** 0,5. **631.** 4. **632.** 25. **633.** –36. **634.** 0. **635.** 0,34. **636.** 2. **637.** 0. **638.** 2. **639.** 2. **640.** –3,4. **641.** 7. **642.** –1. **643.** 0. **644.** $2\cos x - \sin x$. **645.** $\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x$. **646.** $7^x \ln 7 + e^x$. **647.** $3 \cdot 2^x \ln 2 + e^x$. **648.** $\frac{2}{x\ln 2} + \frac{1}{x}$. **649.** $\frac{2}{x} - \frac{3}{x\ln 7}$. **650.** $-\frac{1}{\sin^2 x} + 6x^2 - 2^x \ln 2$. **651.** $21x^6 \log_3 x + \frac{3x^6}{\ln 3}$. **652.** $\frac{2x + (x^2 - 7)\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

653. $4\cos(4x+\pi)+2^{2x+4}\ln 2$. **654.** $\cos x + 12x^5$. **655.** $2x + 3x^2 + e^x$. **656.** $1/x + 2e2^x$. **657.** $2x\ln 2 + e^x - \cos x$. **658.** $-\frac{1}{x^2}+6x^5$. **659.** $-\cos x + 3x^2$. **660.** $10x^4 + 3\sin x$. **661.** $2\cos x - 5x^4$. **662.** $3\cos x - 6x^5$. **663.** $2\sin x + 3x^2$. **664.** $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}-3\cos x$. **665.** $4x^3-1-2\sin x$. **666.** $\frac{3}{\cos^2 3x}-3x^2+1$. **667.** $e^x-\frac{1}{\sqrt{2x}}$. **668.** $\cos 2x-2x+5$. **669.** $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$. **670.** $x^3-x-0{,}5\sin(0{,}5x)$. **671.** $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}-3\cos x$. **672.** $-e^{-x}+\frac{1}{\cos^2 x}$. **673.** $e^{\sin x}\cos x$. **674.** $-e^{\cos x}\sin x$. **675.** $2e^{\sin 2x}\cos 2x$. **676.** $-2e^{\cos 2x}\sin 2x$. **677.** $\operatorname{ctg} x$. **678.** $-\operatorname{tg} x$. **679.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **680.** $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3}$. **681.** $2e^{\sin^2 2x}\sin 4x$. **682.** $-3e^{\cos^2 3x}\sin 6x$. **683.** $-6e^{\cos^3 2x}\cos^2 2x\cdot\sin 2x$. **684.** $16e^{\sin^4 4x}\sin^3 4x\times\cos 4x$. **685.** $2\operatorname{ctg}\left(e^{x^2}\right)e^{x^2}x$. **686.** $-2\operatorname{tg}\left(e^{x^2}\right)e^{x^2}x$. **687.** $2e^x\operatorname{ctg}(e^x)$. **688.** $-2e^x\operatorname{tg}(e^x)$. **689.** 0. **690.** –3. **691.** e^{-4}. **692.** 0. **693.** 0. **694.** 12. **695.** –3. **696.** 28. **697.** 0. **698.** –83. **699.** 0,5. **700.** 8,25. **701.** 5. **702.** 1+e. **703.** 4,125. **704.** 29. **705.** 48. **706.** 625. **707.** 12. **708.** 2. **709.** 50. **710.** 6. **711.** 2. **712.** 1. **713.** 1. **714.** $E_K = 242$. **715.** 1 м/с. **716.** 1,5. **717.** 3. **718.** 1. **719.** 2. **720.** 0. **721.** –1. **722.** 4,5. **723.** –3. **724.** 0,5. **725.** –21. **726.** 10. **727.** 7. **728.** 4. **729.** 7. **730.** 11. **731.** 7. **732.** 0. **733.** $-\frac{1}{4}$. **734.** –2. **735.** 2. **736.** $-\frac{1}{4}$. **737.** –1. **738.** –4. **739.** $\frac{3}{2}$. **740.** –4. **741.** –1. **742.** $\frac{1}{4}$. **743.** 6. **744.** 5,1. **745.** 2,1. **746.** 3. **747.** –4. **748.** 0,5. **749.** 2. **750.** 4,5. **751.** $2+3e^2$. **752.** e–1. **753.** 3. **754.** 2. **755.** –1. **756.** 2. **757.** 3. **758.** –2. **759.** –0,5. **760.** 2. **761.** 3. **762.** 1. **763.** 2. **764.** 0. **765.** $5-e^{-5}$. **766.** –1. **767.** $\frac{\pi}{3}$. **768.** 3. **769.** 2. **770.** ± 1. **771.** 3. **772.** –4. **773.** 0. **774.** –3. **775.** –2. **776.** 3. **777.** 2. **778.** 3. **779.** 3. **780.** 4. **781.** 6. **782.** 4. **783.** 4. **784.** 3. **785.** 3. **786.** 3. **787.** 2. **788.** 4. **789.** 0. **790.** –3. **791.** 2. **792.** 45°. **793.** 2. **794.** 6. **795.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **796.** –5. **797.** 1. **798.** –5. **799.** –1. **800.** –2. **801.** 6. **802.** 4. **803.** $2\sqrt{x}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{5}{12}$. **804.** $\sin x - \cos x - \operatorname{ctg} x + 5$. **805.** $2\sqrt{x}+\sin x + x + 7$.

806. $11-2\sin x-7\cos x-3\operatorname{ctg} x$. **807.** $x^3+x^6-8\cos x+3$. **808.** $-\frac{16}{x}+31x+\sqrt{x}-8$. **809.** $10-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$. **810.** $4+\frac{3}{2x}$. **811.** $2+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$. **812.** $3+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} 3x$. **813.** $\frac{3}{4}\ln 4x+3$. **814.** $2e^{2x}+x+1$. **815.** $2\log 3x+1$. **816.** $\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+3$. **817.** $\ln x+x^3+2$. **818.** $3^x-\frac{x^4}{2}+$ $+\sin x+1$. **819.** $\frac{1}{x}+\ln x+5$. **820.** e^x-x^3+1. **821.** x^3-2e^x+2. **822.** $x\ln x-x+1$. **823.** $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}$. **824.** $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3-\frac{8}{9}$. **825.** xe^x-e^x+1. **826.** $x^2e^x-2xe^x+2e^x-1$. **827.** $12\frac{1}{3}$. **828.** $\sqrt{3}-1$. **829.** 6. **830.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **831.** 28. **832.** 6. **833.** 36. **834.** 20. **835.** 1. **836.** 1. **837.** 2,75. **838.** 1. **839.** 3. **840.** 9. **841.** $\frac{22}{3}$ или $7\frac{1}{3}$. **842.** $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **843.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. **844.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **845.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **846.** 2ln2 – 1. **847.** 12. **848.** $\frac{60}{13}$. **849.** 8. **850.** 1. **851.** 4. **852.** 50. **853.** 6. **854.** 5 см. **855.** 4 см^2. **856.** 6 см^2. **857.** 3. **858.** 6,25. **859.** $3+2\sqrt{3}$. **860.** 2. **861.** $12\sqrt{3}$. **862.** 18. **863.** 6. **864.** 60. **865.** $6\sqrt{5}$. **866.** 1,6. **867.** 6. **868.** 10. **869.** 20. **870.** 8. **871.** 288. **872.** 18. **873.** 9. **874.** 37,5. **875.** 216. **876.** 40,8. **877.** 4. **878.** 14. **879.** 31,36. **880.** 14. **881.** 7,5. **882.** $4\sqrt{3}$. **883.** 96. **884.** 2,6. **885.** 25. **886.** 60. **887.** 15. **888.** 42. **889.** 12. **890.** 4. **891.** 30. **892.** 24. **893.** 4,8. **894.** 30. **895.** 336. **896.** 256. **897.** 0,75. **898.** 3. **899.** 8. **900.** 16. **901.** 20. **902.** 98. **903.** 1. **904.** 20. **905.** 15. **906.** 90. **907.** 12. **908.** 24. **909.** 200. **910.** 3,5. **911.** 22,4. **912.** 3,2. **913.** $27\sqrt{3}$. **914.** 10. **915.** 18. **916.** 10. **917.** 272. **918.** 2,25. **919.** 2. **920.** 3. **921.** 4. **922.** 3. **923.** 2. **924.** 6. **925.** 72 см^2. **926.** 18 см. **927.** 1. **928.** 0,5. **929.** 2. **930.** 0,5. **931.** 1. **932.** 36. **933.** 24. **934.** 12. **935.** 60. **936.** 264 см^2. **937.** 2,4. **938.** 0,2. **939.** 2,4. **940.** 30. **941.** 45. **942.** 90. **943.** 36. **944.** 8. **945.** 14. **946.** 3. **947.** 32. **948.** 144. **949.** 26. **950.** 128. **951.** 72. **952.** 12. **953.** 20. **954.** 24. **955.** 24. **956.** 8. **957.** 57,6. **958.** $5{,}4\sqrt{5}$. **959.** 60. **960.** 8. **961.** 4,5. **962.** 240. **963.** 576. **964.** 120. **965.** 32. **966.** 1728. **967.** 2,25. **968.** 1. **969.** 12. **970.** 48. **971.** $\frac{9\sqrt{7}}{4}$. **972.** 6.

973. $\sqrt{31}$. **974.** 36. **975.** 6. **976.** 5. **977.** 0,2. **978.** 4,5. **979.** 4. **980.** 6. **981.** 1. **982.** 60. **983.** 3. **984.** 45. **985.** 30. **986.** 9. **987.** 27. **988.** 12. **989.** 6. **990.** 4. **991.** 122. **992.** 5. **993.** 8. **994.** 12. **995.** 36. **996.** 72. **997.** 6. **998.** 256. **999.** 156. **1000.** 18. **1001.** 16. **1002.** 192. **1003.** 32. **1004.** 24. **1005.** 3. **1006.** 24. **1007.** 18. **1008.** 9,6. **1009.** 24. **1010.** 120. **1011.** 3. **1012.** 35π. **1013.** 54. **1014.** 10π. **1015.** 6π. **1016.** 60π. **1017.** 36π. **1018.** 4π. **1019.** 70. **1020.** 4500π. **1021.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **1022.** 1. **1023.** $\frac{\pi\sqrt{13}}{16}$. **1024.** $\frac{25\pi}{4}$. **1025.** 10. **1026.** $21\sqrt{3}$. **1027.** 216. **1028.** 54. **1029.** 2000. **1030.** 5. **1031.** $4\pi\sqrt{3}$. **1032.** 8π. **1033.** $9\pi\sqrt{2}$. **1034.** 31π. **1035.** 36. **1036.** 40. **1037.** 1/12. **1038.** 1500π. **1039.** $54\sqrt{6}$. **1040.** $\sqrt{22}$. **1041.** $8(1+\sqrt{2})$. **1042.** $60\sqrt{11}$. **1043.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **1044.** 30.

Справочное издание

Лаппо Лев Дмитриевич
Попов Максим Александрович

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЭКСПЕРТ В ЕГЭ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16678 от 20.05.2015 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Е. В. Григорьева, И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *А. С. Федотова, А. В. Толокевич*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебн[illegible]

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7 915 222 15 42, +7 926 063 81 80.

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).